



**Rita Isabel Laranjeira Costa Ribeiro**

Licenciada em Matemática

## **Relatório de Estágio**

### **O raciocínio matemático na realização de demonstrações e na resolução de desafios lógicos**

Um estudo com alunos do 12.º ano do ensino secundário

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientadora: Professora Doutora Helena Rocha, Professora  
Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologias da  
Universidade Nova de Lisboa

Coorientadora: Licenciada Maria do Rosário Lopes, Professora,  
Agrupamento de Escolas António Gedeão

Júri:

Presidente: Professora Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos  
Arguente: Professor Doutor António Manuel Dias Domingos  
Vogais: Professora Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha  
Professora Maria do Rosário Dias Gaiteiro Lopes



FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

julho de 2018





**Rita Isabel Laranjeira Costa Ribeiro**

Licenciada em Matemática

## **Relatório de Estágio**

### **O raciocínio matemático na realização de demonstrações e na resolução de desafios lógicos**

Um estudo com alunos do 12.º ano do ensino secundário

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
Ensino de Matemática no 3.º ciclo do ensino Básico e no Secundário

Orientadora: Professora Doutora Helena Rocha, Professora  
Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologias da  
Universidade Nova de Lisboa

Coorientadora: Licenciada Maria do Rosário Lopes, Professora,  
Agrupamento de Escolas António Gedeão

Júri:

Presidente: Professora Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos  
Arguente: Professor Doutor António Manuel Dias Domingos  
Vogais: Professora Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha  
Professora Maria do Rosário Dias Gaiteiro Lopes



julho de 2018

# **O raciocínio matemático na realização de demonstrações e na resolução de desafios lógicos**

Um estudo com alunos do 12.º ano do ensino secundário

Copyright

Rita Isabel Laranjeira Costa Ribeiro  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Universidade Nova de Lisboa

Faculdade de Ciências e Tecnologia e Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

## *Agradecimentos*

À professora Rosário Lopes por me mostrar a excelência do Ensino, por partilhar comigo o seu tempo e a sua disponibilidade. Por me ter dado a sua força, incentivo e motivação nas mais diversas decisões que tomei. Acima de tudo, por acreditar em mim.

À professora Helena Rocha que me levou pelo caminho da investigação em Educação. E, acima de tudo, por me ter dado a conhecer o que melhor eu conseguia fazer.

À professora Helena Santos, que me potenciou uma reflexão crítica sobre a prática docente e sempre esteve disponível para me ouvir.

À Professora Ana Peres, que sempre compreendeu as minhas preocupações durante o estágio e que me cativou todos os dias com a sua prática letiva.

À professora Helena Calado, que me deu a conhecer o trabalho de um diretor de turma.

Aos professores da Escola Secundária António Gedeão, que sempre se mostraram disponíveis para me ajudar em tudo o que precisei ao longo do ano letivo.

Aos alunos das turmas do 7.º e do 12.º ano que caminharam comigo nesta aventura e com quem aprendi muito. Em especial àqueles que voluntariamente colaboraram na realização do estudo.

Aos professores que me acompanharam até chegar aqui, que foram a minha fonte de inspiração e que me incentivaram a seguir a minha motivação. Aos professores da minha escola básica, da minha escola secundária e da minha faculdade, que contribuíram para aquilo que hoje sou.

Um especial agradecimento ao professor Christopher Aretta que protagonizou tudo o que um docente deve ser e que me inspirou e fortaleceu neste ano particularmente desafiante.

À Valéria e à Joana. Às colegas de curso e às amigas, que sabem quem são, e que fizeram com que nunca deixasse de acreditar que iria conseguir chegar até aqui. Obrigada por todo o apoio.

À minha família, um pedido de desculpas por todas as ausências que poderão ter sentido, mas que nunca me deixaram sentir. Espero um dia conseguir agradecer-vos como vocês merecem.

Aos meus avós e à minha bisavó que nunca, mas mesmo nunca, me faltam.

À minha irmã que está sempre atenta ao meu coração e me dá alento para continuar.

Ao meu pai que me apoia em todas as minhas opções e me mostra todo o seu orgulho.

Aos meus sogros, por tudo o que fazem por mim e por todo o apoio que me dão todos os dias.

À pessoa com quem partilho a minha vida, que está comigo em todos os momentos e que me apoia incondicionalmente.

A todos aqueles que jamais conseguirei mencionar em tão pouco espaço, mas que estiveram a torcer por mim desde o primeiro dia. Muito obrigada!



## *Resumo*

O presente trabalho divide-se em duas partes. A primeira, o relatório de estágio, é dedicada à prática pedagógica supervisionada no âmbito do estágio pedagógico inserido no Mestrado em ensino de matemática no 3.º ciclo do ensino básico e no secundário. Esta inclui uma caracterização do contexto escolar no qual o estágio foi desenvolvido, assim como reflexões críticas sobre todas as aulas assistidas, sobre as aulas que a professora estagiária acompanhou e nas quais participou ativamente em colaboração com a professora titular e, ainda, sobre todas as experiências vividas fora da sala de aula, como a prática da direção de turma, os projetos abraçados e as reuniões assistidas. A segunda parte diz respeito ao trabalho de investigação inserido na prática pedagógica e no qual se procura compreender de que modo os processos de raciocínio em demonstrações algébricas se distinguem da resolução de desafios lógicos e identificar as principais dificuldades de alunos do 12.º ano do ensino secundário nestes processos. O estudo apresentado orientou-se pelas seguintes questões de investigação:

1. Que tipo de raciocínio demonstram os alunos durante a resolução de desafios lógicos e de demonstrações algébricas?
2. Quais as maiores dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução de desafios lógicos comparativamente à resolução de demonstrações algébricas?
3. De que forma a utilização de exemplos influencia o raciocínio dos alunos durante a resolução de desafios lógicos ou demonstrações algébricas?
4. Que diferenças são evidenciadas pelos alunos entre a capacidade de resolução de desafios lógicos e a capacidade de resolução de demonstrações algébricas?

O estudo desenvolveu-se segundo uma metodologia qualitativa de índole interpretativa, utilizando, para tal, dois estudos de caso. As principais técnicas de recolha de dados utilizadas foram a observação participante, a realização de entrevistas e a recolha documental.

As conclusões alcançadas sugerem que os alunos de 12.º ano apresentam grande dificuldade na abordagem a desafios lógicos ou demonstrações algébricas que divirjam daquilo a que estão habituados a resolver na disciplina de matemática, procurando um algoritmo ou mecanismo para obter a solução, colocando de parte, diversas vezes, a intuição. No entanto, as dificuldades são atenuadas com o recurso a exemplos, procurando, desse modo, o desenvolvimento de um raciocínio mais indutivo. O recurso aos exemplos evidenciou-se como uma potencial estratégia para uma melhor compreensão das propriedades analisadas.

Palavras-chave: estágio pedagógico; desafios lógicos; demonstrações algébricas; raciocínio; exemplos; contraexemplos.





## *Abstract*

The following dissertation is divided in two parts. The first is the teaching training report which is dedicated to the supervised pedagogical practice that comprises the pedagogical traineeship inserted in the masters curriculum. This part includes a characterization of the scholar context in which the traineeship occurred as well as critical reflections about: the lectured classes, the classes which the trainee teacher watched and actively participated in collaboration with the main teacher, and also about all the experiences lived outside the classroom like the class management, all the embraced projects and the assisted teacher's meetings. The second part consists of the investigation work done in the pedagogical practice. This work is aimed to understand in which way the reasoning processes used in algebraic tasks and in logical challenges are correlated as well as identify the main struggles of the 12th grade students in these processes. The present study guide questions are:

1. Which kind of reasoning is used by students during the resolution of logical challenges and algebraic proofs?
2. What are the main difficulties shown by students in the resolution of logical challenges in comparison with algebraic proofs?
3. In which way the utilization of examples influences the students reasoning during the resolution of logical challenges and algebraic proofs?
4. What are the differences evidenced in the students ability to solve logical challenges in comparison with algebraic proofs?

The study was developed according to an interpretative qualitative methodology, using, for that purpose, two case studies. The main data collection techniques were the participant observation, the carrying of interviews and the search for documentation.

The study's achieved conclusions suggest that 12th grade students present major difficulties approaching, whether logical challenges or algebraic tasks, that diverge from the mathematical school curriculum. In many cases, students searched for a mechanism or an algorithm that could lead them to the answer, putting many times aside their intuition. Nevertheless, this struggles are mostly attenuated when students use examples, in this way conducting a more inductive reasoning. Thus, the use of examples can be seen as a potential strategy to enhance the students comprehension of the analyzed properties.

Keywords: pedagogical traineeship; logical challenges; algebraic proofs; reasoning; examples; counterexamples.



# Índice

<b>Parte I.....</b>	<b>1</b>
1. Caracterização e contextualização do Agrupamento.....	3
1.1. O Concelho de Almada.....	3
1.2. O Agrupamento de Escolas António Gedeão .....	4
1.3. A Escola Secundária António Gedeão.....	6
1.4. António Gedeão, o Poeta. Rómulo de Carvalho, o Cientista.....	7
2. Caracterização da turma do 12.º ano .....	11
3. Prática Pedagógica Supervisionada .....	15
3.1. Aulas lecionadas .....	15
3.2. Planos de Aula .....	16
3.3. A turma do 12.º ano .....	17
3.3.1. Primeiro Período .....	18
3.3.1.1. Avaliação.....	18
3.3.1.2. Aulas lecionadas.....	18
3.3.1.2.1. Primeira Aula .....	19
3.3.1.2.2. Segunda Aula .....	22
3.3.2. Segundo Período .....	25
3.3.2.1. Avaliação.....	26
3.3.2.2. Aulas lecionadas.....	26
3.3.2.2.1. Terceira Aula.....	26
3.3.2.2.2. Quarta Aula .....	30
3.3.2.2.3. Quinta Aula .....	33
3.3.2.2.4. Sexta Aula .....	37
3.3.3. Terceiro Período.....	39
3.3.3.1. Avaliação.....	39
3.3.3.2. Aulas lecionadas.....	40
3.3.3.2.1. Sétima Aula.....	40
3.3.3.2.2. Oitava Aula .....	44
3.3.4. Avaliação e Classificação .....	47
3.4. A turma do 7.º ano .....	48
3.4.1. Aulas lecionadas.....	48
3.4.1.1. Primeira aula .....	48
3.4.1.2. Segunda aula .....	52
3.4.1.3. Terceira aula.....	55
3.4.2. Direção de Turma.....	59
3.5. Componente não letiva .....	59
3.5.1. Projeto Pedro Nunes.....	59

3.5.2. Projeto Primitivação e Integração .....	60
3.5.3. Visitas de Estudo .....	62
3.5.4. Reuniões assistidas .....	62
3.6. Reflexão Crítica sobre a Prática Pedagógica .....	63
<b>Parte II.....</b>	<b>67</b>
1. Introdução .....	69
1.1. Motivação e pertinência do estudo .....	69
1.2. Objetivos e questões de investigação.....	71
2. Revisão de Literatura .....	73
2.1. Raciocínio matemático e tipos de raciocínio matemático.....	73
2.2. Processos de raciocínio .....	77
2.2.1. Conjeturar e Generalizar .....	77
2.2.2. Justificar e Demonstrar .....	79
2.3. Demonstração, exemplos e contraexemplos .....	83
2.4. O raciocínio matemático no currículo.....	86
3. Metodologia .....	89
3.1. Investigação qualitativa .....	89
3.2. Estudo de caso.....	91
3.3. Técnicas de recolha de dados.....	92
3.3.1. Observação participante e não participante.....	93
3.3.2. Entrevista.....	94
3.3.3. Análise documental.....	96
3.4. A ética .....	97
3.5. Procedimentos metodológicos adotados .....	97
3.5.1. Critérios de escolha dos alunos .....	98
3.5.2. Técnicas e instrumentos de recolha de dados .....	99
3.5.2.1. Observação.....	100
3.5.2.2. Entrevista semiestruturada .....	100
3.5.2.3. Análise documental .....	100
3.5.3. Sessões de trabalho .....	101
3.6. Os desafios lógicos de seleção.....	102
3.6.1. Profissões .....	102
3.6.2. Os Jokers do baralho vermelho .....	103
3.7. Os desafios lógicos aplicados .....	104
3.7.1. Desafio 1: As idades dos meninos .....	104
3.7.2. Desafio 2: Simpáticas, mas... Um pouco mentirosas!.....	104
3.7.3. Desafio 3: O agente de recenseamento .....	105
3.8. As demonstrações algébricas aplicadas .....	106
3.8.1. Demonstração 1: Quadrados Perfeitos .....	106
3.8.2. Demonstração 2: Números Primos.....	106

3.8.3. Demonstração 3: Produto.....	106
4. Estudo de caso: Luísa .....	107
4.1. Caracterização de Luísa .....	107
4.2. Desafios lógicos .....	107
4.2.1. Desafio 1: Idades dos Meninos .....	107
4.2.2. Desafio 2: Simpáticas, mas um pouco mentirosas .....	110
4.2.3. Desafio 3: Agente de recenseamento .....	111
4.3. Demonstrações Algébricas.....	113
4.3.1. Demonstração 1: Quadrados Perfeitos .....	113
4.3.2. Demonstração 2: Números Primos.....	117
4.3.3. Demonstração 3: Produto.....	120
4.4. Decisões tomadas e dificuldades sentidas por Luísa .....	123
4.4.1. 1. <sup>a</sup> sessão: Desafio 1 + Demonstração 1.....	123
4.4.2. 2. <sup>a</sup> sessão: Desafio 2 + Demonstração 2.....	124
4.4.3. 3. <sup>a</sup> sessão: Desafio 3 + Demonstração 3.....	124
4.5. Síntese do Estudo de Caso: Luísa .....	125
5. Estudo de caso: Matilde .....	127
5.1. Caracterização de Matilde.....	127
5.2. Desafios lógicos .....	127
5.2.1. Desafio 1: Idades dos Meninos .....	127
5.2.2. Desafio 2: Simpáticas, mas um pouco mentirosas .....	130
5.2.3. Desafio 3: Agente de recenseamento .....	131
5.3. Demonstrações algébricas.....	134
5.3.1. Demonstração 1: Quadrados Perfeitos .....	134
5.3.2. Demonstração 2: Números Primos.....	137
5.3.3. Demonstração 3: Produto.....	142
5.4. Decisões tomadas e dificuldades sentidas por Matilde.....	145
5.4.1. 1. <sup>a</sup> sessão: Desafio 1 + Demonstração 1.....	145
5.4.2. 2. <sup>a</sup> sessão: Desafio 2 + Demonstração 2.....	145
5.4.3. 3. <sup>a</sup> sessão: Desafio 3 + Demonstração 3.....	146
5.5. Síntese do estudo de caso: Matilde .....	146
6. Conclusão .....	149
6.1. Considerações Finais .....	159
7. Bibliografia .....	161



## *Índice de Figuras*

Figura 1: Mapa do concelho de Almada.....	3
Figura 2: Rómulo de Carvalho em visita à Escola Secundária António Gedeão. ....	9
Figura 3: Distribuição das idades dos alunos da turma do 12.º ano. ....	11
Figura 4: Habilitações literárias dos encarregados de educação dos alunos do 12.º ano. ....	13
Figura 5: Localidade de residência dos alunos do 12.º ano. ....	13
Figura 6: Representação do triângulo de Spierpinski através do triângulo de Pascal. ....	28
Figura 7: Exemplos de funções representadas na ficha de trabalho. ....	53
Figura 8: Exemplos de questões e respostas dadas no Plickers.....	57
Figura 9: Diferentes fases do processo de construção de uma conjectura de acordo com Mason, Burton e Stacey (2010, p. 59).....	78
Figura 10: Tradução simbólica por parte de Luísa de algumas informações do Desafio 1.....	107
Figura 11: Excerto da resolução de Luísa no Desafio 1. ....	108
Figura 12: Esquema realizado por Luísa durante a resolução do Desafio 2.....	110
Figura 13: Tradução simbólica do enunciado da Demonstração 1 por Luísa. ....	113
Figura 14: Exemplos realizados por Luísa no início da resolução da Demonstração 1. ....	114
Figura 15: Tradução simbólica e concretização de alguns exemplos de Luísa na Demonstração 2. ....	118
Figura 16: Tradução simbólica do enunciado da Demonstração 3 por Luísa. ....	120
Figura 17: Exemplos considerados por Luísa durante a resolução da Demonstração 3. ....	122
Figura 18: Resposta dada por Luísa à Demonstração 3.....	122
Figura 19: Equação escrita por Matilde no Desafio 1. ....	127
Figura 20: Hipóteses das idades dos meninos enumeradas por Matilde no Desafio 1.....	128
Figura 21: Resolução de Matilde do Desafio 2. ....	130
Figura 22: Esquema realizado por Matilde durante a resolução do Desafio 3. ....	131
Figura 23: Exemplos realizados por Matilde durante a resolução da Demonstração 1.....	134
Figura 24: Equação escrita por Matilde durante a realização da Demonstração 1.....	135
Figura 25: Desenvolvimento da expressão de Matilde durante a realização da Demonstração 1.....	135
Figura 26: Resposta de Matilde à Demonstração 1. ....	136
Figura 27: Representação de Matilde durante a realização da Demonstração 2. ....	138
Figura 28: Tradução simbólica do enunciado da Demonstração 2.....	139
Figura 29: Exemplos ilustrados por Matilde durante a resolução da Demonstração 2. ....	140
Figura 30: Tradução simbólica e manipulação algébrica realizada por Matilde na Demonstração 3. ....	142
Figura 31: Exemplos de Matilde durante a resolução da Demonstração 3. ....	142
Figura 32: Exemplo concretizado por Matilde durante a resolução da Demonstração 3. ....	143
Figura 33: Parte final da resposta de Matilde à Demonstração 3. ....	144





## *Índice de Tabelas*

Tabela 1: Número de turmas e de alunos por nível de ensino. ....	4
Tabela 2: Distribuição dos docentes do Agrupamento por grupo de recrutamento. ....	5
Tabela 3: Número de alunos por ano de escolaridade da ESAG. ....	6
Tabela 4: Análise das classificações do 12.º ano ao longo dos 3 períodos letivos. ....	12
Tabela 5: Análise das classificações da turma ao longo dos 3 anos escolares. ....	12
Tabela 6: Síntese das aulas lecionadas e supervisionadas ao longo do ano letivo. ....	15
Tabela 7: Aulas de matemática A da turma do 12.º ano. ....	17
Tabela 8: Instrumentos de avaliação aplicados no 1.º período. ....	18
Tabela 9: Instrumentos de avaliação aplicados no 2.º período. ....	26
Tabela 10: Instrumentos de avaliação aplicados no 3.º período. ....	40
Tabela 11: Turmas de apoio no projeto Pedro Nunes ....	60
Tabela 12: Calendarização das atividades na FCT-NOVA. ....	61
Tabela 13: Sistematização das informações dos alunos selecionados na segunda fase. ....	99
Tabela 14: Calendarização das sessões de trabalho. ....	101
Tabela 15: Horário de cada uma das sessões e respetiva duração. ....	101
Tabela 16: Duração dos desafios e das demonstrações em cada uma das sessões. ....	101
Tabela 17: Preferências dos alunos relativamente às demonstrações e aos desafios. ....	102



## ***Lista de Abreviaturas***

AEAG – Agrupamento de Escolas António Gedeão

APM – Associação de Professores de Matemática

FCT-UNL – Faculdade de Ciências e Tecnologia, da Universidade Nova de Lisboa

ME – Ministério da Educação

MEC – Ministério da Educação e da Ciência

NCTM – National Council of Teachers Mathematics

PEA – Projeto Educativo do Agrupamento

PMES – Programa de matemática A do ensino secundário

PMEB – Programa de matemática do ensino básico



## Parte I

---

### **Relatório de Estágio**

Relato da experiência na Escola Secundária António Gedeão com uma turma de 7.º ano do ensino básico e uma turma de 12.º ano de escolaridade



# 1. Caracterização e contextualização do Agrupamento

## 1.1. O Concelho de Almada

Almada, topónimo de raiz árabe, pertence ao Distrito de Setúbal, região de Lisboa e sub-região da Península de Setúbal. O concelho de Almada está subdividido em 5 freguesias, tal como estão representadas na Figura 1. A sua localização na extremidade Noroeste da Península de Setúbal, com o Rio Tejo, o maior rio da Península Ibérica, a desaguar entre Almada e Oeiras, fez desta um ponto estratégico militar para a defesa e vigilância das rotas comerciais da região. Almada, nomeadamente Cacilhas, era um dos principais portos da Península Ibérica. Hoje em dia, a sua excelente localização continua a ser um fator de fixação das pessoas.

Almada é sede de um município com 70,21  $km^2$  e é a décima cidade mais populosa do país, com cerca de 174 030 habitantes, dos quais cerca de 25% representam a fração mais jovem, com idades inferiores a 25 anos<sup>1</sup>. A proporção da população com ensino superior é de 14,5%, quando em 2001 era 9,1%. De 2001 até 2011 também se verificaram progressos na taxa de analfabetismo, que passou de 6,06% para 3,27%. Estes dados demonstram uma evolução positiva no que diz respeito à Educação na cidade de Almada.

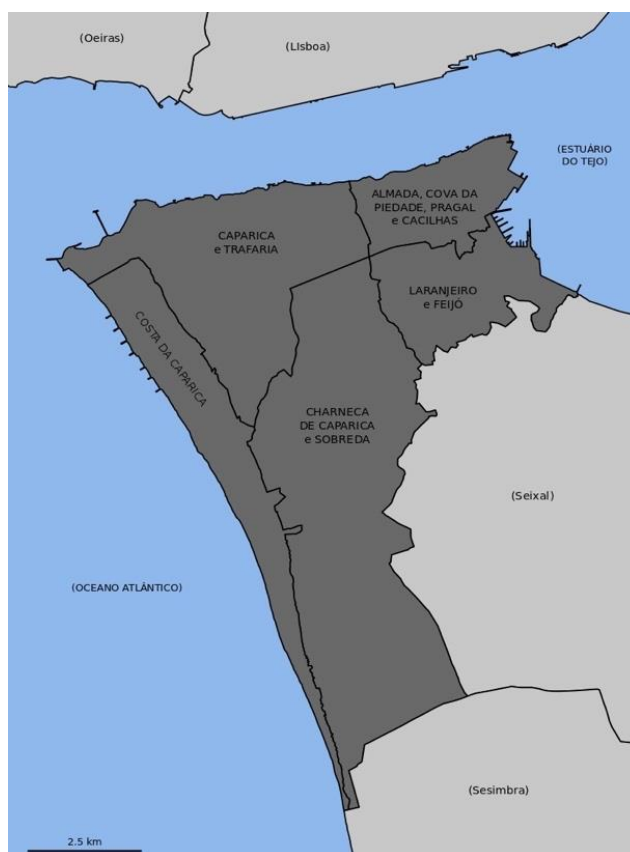


Figura 1: Mapa do concelho de Almada.

---

<sup>1</sup> De acordo com os censos de 2011

## 1.2. O Agrupamento de Escolas António Gedeão

O estágio pedagógico realizou-se numa das escolas do Agrupamento de Escolas António Gedeão, pelo que será pertinente fazer uma breve caracterização do Agrupamento e, em seguida, uma abordagem particular à escola onde se desenvolveu o estágio, a escola sede do Agrupamento. O AEAG localiza-se na União das Freguesias Laranjeiro–Feijó e União das Freguesias da Cova da Piedade, Almada, Pragal e Cacilhas, no concelho de Almada. No início do ano letivo, o Agrupamento era constituído por 2253 alunos, tal como se pode observar na Tabela 1.

Tabela 1: Número de turmas e de alunos por nível de ensino.

Nível de ensino	Número de Turmas	Número de Alunos
<b>Pré-escolar</b>	10	226
<b>1.º ciclo</b>	47	818
<b>2.º ciclo</b>	19	444
<b>3.º ciclo</b>	20	455
<b>Secundário</b>	14	310
<b>Total</b>	110	2253

O Agrupamento foi constituído a 26 de abril de 2013 por determinação governamental e é composto por seis estabelecimentos de educação e ensino:

- a Escola Secundária António Gedeão (Escola-sede do Agrupamento – 7.º ao 12.º anos + Cursos de Educação e Formação [CEF] + cursos profissionais);
- a Escola Básica Comandante Conceição e Silva (UEE\*, 2.º ciclo, 5.º e 6.º ano);
- a Escola Básica do Alfeite, Laranjeiro (Pré-escolar + 1.º ciclo até ao 4.º ano);
- a Escola Básica n.º 1 da Cova da Piedade (Pré-escolar + 1.º ciclo até ao 4.º ano);
- a Escola Básica n.º 2 da Cova da Piedade (1.º ciclo até 1.º ao 4.º ano);
- a Escola Básica n.º 3 do Laranjeiro (UEE\*, 1.º ciclo, pré-escolar + 1.º ciclo até ao 4.º ano).

\* Unidade de Ensino Estruturado – Espectro do Autismo

Relativamente ao contexto económico dos alunos do Agrupamento, é possível dizer que no início do ano letivo, num universo de 2253 alunos existia um total de 409 alunos com Escalão A e 246 alunos com Escalão B, o que significa que aproximadamente um terço dos alunos é auxiliado economicamente. No que diz respeito à nacionalidade, cerca de 7% dos alunos são estrangeiros, oriundos de países como o Brasil, Cabo Verde, Moldávia, S. Tomé e Príncipe e China, entre outros.

O Projeto Educativo do Agrupamento é um dos instrumentos do exercício da autonomia dos Agrupamentos de escolas e escolas não agrupadas, no qual se determina a política educativa do Agrupamento. Este documento é elaborado e aprovado pelos seus órgãos de administração e gestão, e



nele se explicitam os princípios, os valores, as metas e as estratégias segundo os quais o Agrupamento se propõe cumprir a sua função educativa. O PEA do AEAG foi aprovado em 2016 para um período de três anos. Para a conceção deste foi imprescindível assumir valores e defender princípios, priorizar domínios, definir metas e determinar objetivos, que culminassem na construção de um projeto válido, consistente e coerente com o Agrupamento que se tem e que se deseja ter. Assim, será pertinente na apresentação do Agrupamento dar particular atenção à Missão, à Visão, aos Princípios Orientadores e aos Valores que regem o mesmo.

**Missão:** O AEAG deve tornar os seus alunos cidadãos de excelência, conscientes, críticos e preparados para os desafios do futuro, dando-lhes, assim, uma formação integral.

**Visão:** As Escolas do AEAG pretendem ser um espaço de intervenção contínua de toda a comunidade educativa, proporcionando aos alunos uma escolaridade qualificada e um espaço desafiador, tanto ao nível das suas competências, como ao nível da cidadania. A escola deverá ser o local, por excelência, onde os alunos aprendam a ser, a fazer e a saber estar, tanto individual como coletivamente.

**Valores:** Os valores nos quais os Princípios Orientadores assentam são Inclusão, Solidariedade, Equidade, Cooperação, Liberdade, Ética, Responsabilidade Ambiental e Respeito.

Tabela 2: Distribuição dos docentes do Agrupamento por grupo de recrutamento.

<b>Grupo de recrutamento</b>	<b>Número de docentes</b>	<b>Grupo de recrutamento</b>	<b>Número de docentes</b>
100 – educação pré-escolar	12	400 – história	5
110 – 1.º ciclo do ensino básico	48	410 – filosofia	3
120 – inglês - 1º ciclo	2	420 – geografia	4
200 – português e est. sociais/história	4	430 – economia e contabilidade	2
210 – português e francês	6	500 – matemática	12
220 – português e inglês	4	510 – física e química	8
230 – matemática e ciências da natureza	10	520 – biologia e geologia	9
240 – educação visual e tec.	5	530 – educação tecnológica	4
250 – educação musical	5	550 – informática	2
260 – educação física	4	560 – ciências agropecuárias	2
290 – ed. moral e religiosa	2	600 – artes visuais	3
300 – português	11	620 – educação física	8
320 – francês	3	910 – educação especial	20
330 – inglês	8	999 – técnicas especiais/psicólogo	1
<b>Total</b>			<b>207</b>

Relativamente ao corpo docente, tal como se mostra na Tabela 2, o Agrupamento é constituído por 207 docentes. Da totalidade dos docentes, 162 (78,3 %) pertencem ao Quadro de Agrupamento, 20 (9,7 %) ao Quadro de Zona Pedagógica e 25 (12,1%) são contratados.

### 1.3. A Escola Secundária António Gedeão

A Escola Secundária António Gedeão, sede do Agrupamento de Escolas António Gedeão, está localizada na Alameda Guerra Junqueiro, na antiga freguesia do Laranjeiro, atual união de freguesias Laranjeiro e Feijó. A excelência da localização da escola é um dos seus pontos mais fortes, estando muito próxima dos principais pontos de transportes que servem os concelhos de Almada e do Seixal. A ESAG foi inaugurada a 6 de outubro de 1983, por Sua Ex.<sup>a</sup> o Senhor Ministro da Educação, José Augusto Seabra, tendo entrado em funcionamento no ano letivo de 1983/1984.

Em relação à oferta educativa, para além da oferta regular, estão também em funcionamento, no 3.º ciclo, dois Cursos de Educação e Formação: Jardinagem e Espaços Verdes (2 anos) e Técnico de Comércio (2 anos). No que diz respeito ao Ensino Secundário, o Agrupamento disponibiliza os Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias, Ciências Socioeconómicas e Línguas e Humanidades, onde a oferta anual de disciplinas opcionais é atualizada de acordo com as preferências dos alunos. Procurando atender às necessidades e interesses dos alunos, o Agrupamento complementa ainda a sua oferta com os Cursos de Educação e Formação de Técnico de Turismo, Técnico de Animação Sociocultural e Técnico de Apoio à Infância, todos de nível III, isto é, de equivalência ao 12.º ano. No entanto, no presente ano letivo apenas esteve em funcionamento o curso de Técnico de Turismo, com duas turmas (11.º ano e 12.º ano).

Tabela 3: Número de alunos por ano de escolaridade da ESAG.

Nível de ensino	Número de Alunos
7.º Ano	163
8.º Ano	119
9.º Ano	173
10.º Ano	85
11.º Ano	126
12.º Ano	99

Atualmente, o corpo docente é constituído por 101 profissionais. Da totalidade dos docentes, 81 (80,2 %) pertencem ao Quadro de Agrupamento, 4 (4,0 %) ao Quadro de Zona Pedagógica e 16 (15,8%) são contratados. No que diz respeito ao número de alunos, a escola tinha no início do ano letivo um total de 765 alunos, tal podemos verificar, através da Tabela 3. No 10.º ano encontra-se o menor grupo de alunos (85), em oposição ao 9.º ano, frequentado por um maior número de alunos (173).

A escola começou por ter cinco Pavilhões (Pavilhões E, D, H, L e R), mas em Agosto de 1985 foi alargada com a construção de um Pavilhão pré-fabricado (Pavilhão A), que surgiu para colmatar a necessidade de dar resposta a um número significativo de alunos do concelho de Almada e concelhos vizinhos. A escola iniciou a sua atividade apenas com 3.º ciclo do Ensino Básico, no entanto, a partir do ano letivo 1990/1991, passou a oferecer também o Ensino Secundário.

Das 36 salas da escola, 11 são laboratórios específicos, como por exemplo, de Física, Química, Informática, Ciências Naturais, Educação Visual ou Teatro. Todas as salas têm acesso à internet e estão equipadas com computador e vídeo projetor. Para além das salas comuns e dos laboratórios, a escola está ainda munida de: biblioteca, sala de estudo, refeitório, sala de convívio dos alunos, sala dos professores, sala de diretores de turma, associação de estudantes, papelaria e reprografia, gabinete de primeiros socorros, sala da direção, gabinete da chefe de assistentes operacionais, gabinete de EMRC, pavilhão desportivo e um anexo gímnico.

#### 1.4. António Gedeão, o Poeta. Rómulo de Carvalho, o Cientista.

Rómulo Vasco da Gama de Carvalho começou a revelar a sua propensão para a poesia ainda na infância. Aos 5 anos escreveu os seus primeiros poemas e aos 10 decidiu completar “Os Lusíadas” de Camões. Era filho de um funcionário dos correios e telégrafos e de uma dona de casa, Rómulo de Carvalho nasceu a 24 de novembro de 1906 na freguesia da Sé. Viveu em Lisboa, na rua do Arco do Limoeiro (hoje rua Augusto Rosa) numa casa modesta juntamente com as suas irmãs. A sua mãe, embora tivesse apenas a instrução primária, tinha uma grande paixão pela literatura que invadiu toda a atmosfera que se vivia em casa, através dos livros que comprava em fascículos, vendidos semanalmente pelas casas, ou, mais tarde, requisitados nas livrarias Portugália ou Morais. Esse sentimento foi transmitido a Rómulo, que foi assim batizado em honra do protagonista de um drama lido num folhetim de jornal. Como se deduz facilmente, a figura materna influenciou bastante a vida de Rómulo de Carvalho, despertando em si o gosto pelas letras.

Ao entrar para o liceu Gil Vicente, conheceu o mundo das ciências e cresceu em si um novo interesse, que se vai intensificando até ao último ano do liceu. Por este motivo, Rómulo decidiu ingressar no curso de Ciências Físico-Químicas na faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Em 1932, um ano depois de se ter licenciado, forma-se em ciências pedagógicas na faculdade de letras, denunciando assim a sua principal atividade daí para a frente, professor e pedagogo. Rómulo de Carvalho começou por estagiar no liceu Pedro Nunes, ensinou durante 14 anos no liceu Camões, durante 8 anos no liceu D. João III, em Coimbra e, posteriormente, regressou a Lisboa com um convite para professor metodólogo do grupo de Físico-Químicas do liceu Pedro Nunes.

Dedicou uma vida inteira à ciência e à sua divulgação, tendo elaborado compêndios escolares e coleções dedicadas a entusiastas e curiosos da ciência, nomeadamente a “Gazeta de Física”, da qual foi co-diretor, Ciência para Gente Nova ou Física para o Povo. A divulgação científica era uma ocupação

que Rómulo levava com grande prazer, pois agradava-lhe a comunicação e a partilha de conhecimento. A sua dedicação à cultura científica foi de tal forma relevante para o progresso da ciência em Portugal que, em 1996, o seu trabalho foi homenageado, considerando-se a data do seu nascimento como Dia Nacional da Cultura Científica.

Apesar da imensa atividade científica, Rómulo de Carvalho continuou a escrever poesia. Todavia, por a considerar pouco útil, nunca chega a tentar publicá-la, preferindo destruí-la.

Apenas aos 50 anos publica o primeiro livro de poemas, *Movimento Perpétuo*, num concurso de poesia publicitado no jornal. Este livro é assinado por António Gedeão, mantendo-se Rómulo de Carvalho no anonimato. O livro é bem aceite pela crítica, continuando António Gedeão a publicar poesia, mais tarde teatro, ensino e ficção.

Nos poemas de António Gedeão encontra-se o limite entre a ciência e a poesia, a vida e o sonho, a lucidez e a esperança. António Gedeão é a expressão literária que Rómulo de Carvalho sempre sentiu. É a extensão artística que permitiu saciar o pendor poético de Rómulo de Carvalho. A poesia de António Gedeão é, sem dúvida, um hino de uma geração reprimida por um regime ditatorial e que procura incessantemente, através do sonho, o caminho para a liberdade. Uma das suas principais obras, *Pedra Filosofal*, retrata precisamente o modo como encarava o regime e a guerra que o país atravessava.

Eles não sabem, nem sonham,  
que o sonho comanda a vida,  
que sempre que um homem sonha  
o mundo pula e avança  
como bola colorida  
entre as mãos de uma criança.

**António Gedeão, *Pedra Filosofal* in *Movimento Perpétuo*, 1956**

Rómulo de Carvalho ainda recebeu um convite para lecionar na Universidade de Lisboa, mas recusou. Depois de 40 anos de ensino, e cansado da desorganização e da falta de autoridade que se instalou após o 25 de Abril, decidiu reformar-se.

António Gedeão continuou a escrever, mas durante pouco tempo. Em 1984 publica *Poemas Póstumos*, pois já sente o desejo da morte. Depois dessa publicação segue-se apenas *Novos Poemas Póstumos*, que marcam o fim da vida de António Gedeão.

Posteriormente, a 19 de fevereiro de 1997, Rómulo de Carvalho deixa uma vida dedicada ao ensino, à ciência e à arte.

A 25 de maio de 1992 a Escola Secundária da Cova de Piedade é batizada com o nome de António Gedeão através de um processo de votação aberto a toda a comunidade escolar, pelo que, nesse dia, é comemorado o dia do patrono. Rómulo de Carvalho visita a Escola Secundária António Gedeão, no dia referido no ano de 1993 (Figura 2).

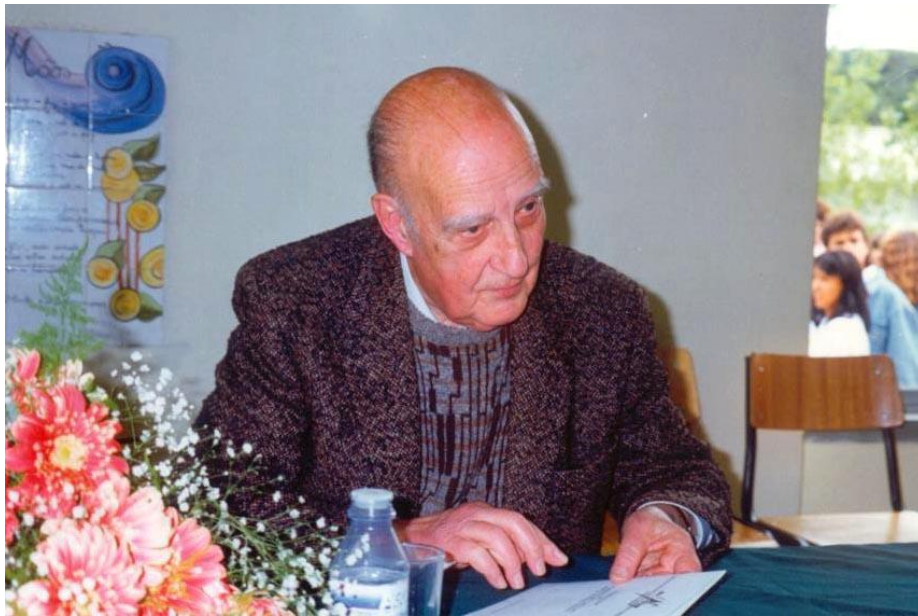


Figura 2: Rómulo de Carvalho em visita à Escola Secundária António Gedeão.

As coisas belas,  
as que deixam cicatrizes na memória dos homens,  
por que motivos serão belas?  
E belas, para quê?  
Põe-se o Sol porque o seu movimento é relativo.  
Derrama cores porque os meus olhos vêem.  
Mas por que será belo o pôr do sol?  
E belo, para quê?  
Se acaso as coisas não são coisas em si mesmas,  
mas só são coisas quando percebidas,  
por que direi das coisas que são belas?  
E belas, para quê?  
Se acaso as coisas forem coisas em si mesmas  
sem precisarem de ser coisas percebidas,  
para quem serão belas essas coisas?  
E belas, para quê?

**António Gedeão, *Poema das coisas belas* in *Poemas póstumos* (1983)**



## 2. Caracterização da turma do 12.º ano

No presente ano letivo, 2017/2018, a professora orientadora Rosário Lopes, lecionou três turmas, duas de 12.º ano do Curso de Ciências e Tecnologias e uma de 11.º ano também do Curso de Ciências e Tecnologias. Embora a professora estagiária tenha frequentado com alguma regularidade a turma do 11.º ano, a maior parte do trabalho desenvolvido no âmbito do estágio pedagógico foi realizado numa das turmas do 12.º ano, pelo que se justifica a realização de uma caracterização mais detalhada relativamente a esta turma. Para a realização das análises apresentadas foram recolhidos alguns dados dos processos individuais dos alunos.

No início do ano letivo, a turma do 12.º ano era constituída por vinte e três alunos (15 raparigas e 8 rapazes), dos quais vinte e um estavam inscritos na disciplina de matemática A. No final do ano, a turma contava com menos um aluno, por este ter anulado a matrícula. A 13 de setembro de 2017, as idades dos alunos compreendiam-se entre os 16 e os 19 anos, como se pode verificar no gráfico da Figura 3. É de notar que todos os alunos com 16 anos no início do ano letivo fizeram 17 anos ainda no decorrer do 1.º período. Nenhum dos alunos se encontrava a repetir o 12.º ano de escolaridade, sendo que apenas dois dos alunos apresentaram alguma irregularidade no seu percurso escolar, tendo reprovado duas vezes em anos anteriores.

Em geral os alunos da turma eram trabalhadores, empenhados e responsáveis. No entanto, ao longo do ano letivo, nas reuniões intercalares e de avaliação, foram apontadas algumas críticas às características da turma, nomeadamente o facto de ser na globalidade muito conversadora e pouco participativa. A turma revelou-se, globalmente, muito unida, uma vez que a maioria dos elementos da turma já se conheciam, pelo menos, desde o 10.º ano. Apenas três alunos ingressaram na turma no presente ano letivo vindos de outra escola.

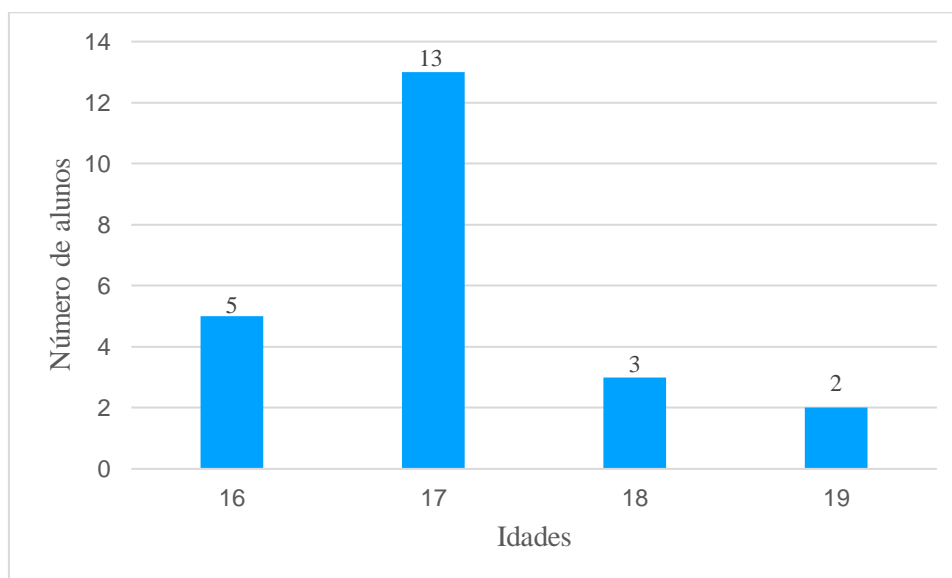


Figura 3: Distribuição das idades dos alunos da turma do 12.º ano.

Ao longo do ensino secundário, a turma apresentou à disciplina uma média de, aproximadamente, 12 valores. No entanto, existe alguma heterogenia quando comparamos as notas mais altas e as notas mais baixas. No 1.º período, os dois melhores alunos da turma obtiveram classificações de 18 e 19 valores. Essas notas mantiveram-se até ao final do 2.º período, tendo subido um valor no final do 3.º período. Contrastando com esta situação, no 1.º período, temos 7 alunos com negativa, tendo 3 deles classificação de 6 valores. O número de negativas, no 2.º período, desce para 6, mas a negativa mais baixa passa a ser de 5 valores. No final do 3.º período, o número de negativas passa para 5. Pelo exposto e tal como se pode observar na Tabela 4, a disparidade de classificações dos diferentes alunos da turma, criou algumas dificuldades na gestão da sala de aula, no que se refere aos desempenhos dos diferentes alunos.

Tabela 4: Análise das classificações do 12.º ano ao longo dos 3 períodos letivos.

<b>Classificações do 12.º ano</b>	<b>1.º período</b>	<b>2.º período</b>	<b>3.º período</b>
<b>Média</b>	11,4	12,1	12,7
<b>Nota mais alta</b>	19	19	20
<b>Nota mais baixa</b>	6	5	5
<b>Número de negativas</b>	7	6	5

Pela análise da Tabela 5 verifica-se uma elevada amplitude das classificações dos alunos da turma desde o 10.º ano, tendo sido o 12.º ano o ano em que os alunos terminaram com uma média final mais baixa (12,7), por oposição ao 10.º ano em que apresentaram a média mais alta (14,5). O menor número de negativas verificou-se nos 10.º e 11.º anos.

Tabela 5: Análise das classificações da turma ao longo dos 3 anos escolares.

<b>Classificações finais</b>	<b>10.º ano</b>	<b>11.º ano</b>	<b>12.º ano</b>
<b>Média</b>	14,5	13,6	12,7
<b>Nota mais alta</b>	19	19	20
<b>Nota mais baixa</b>	8	9	5
<b>Número de negativas</b>	2	2	5

No que diz respeito ao contexto familiar dos alunos, é possível verificar que todos os alunos tinham o pai ou a mãe como encarregado de educação, sendo a mãe a mais frequente (aproximadamente 46%).



No que diz respeito às habilitações literárias dos encarregados de educação, podemos verificar através da Tabela 4 que a maioria tem o grau de licenciatura ou o ensino secundário. Os dados expressos na tabela representada na Figura 4 traduzem o predomínio da classe média das atividades exercidas pelos encarregados de educação. A maioria são empregados por conta de outrem no ramo do comércio ou serviços, mas também há professores, empresários e militares. Uma minoria trabalha em serviços pessoais e domésticos.

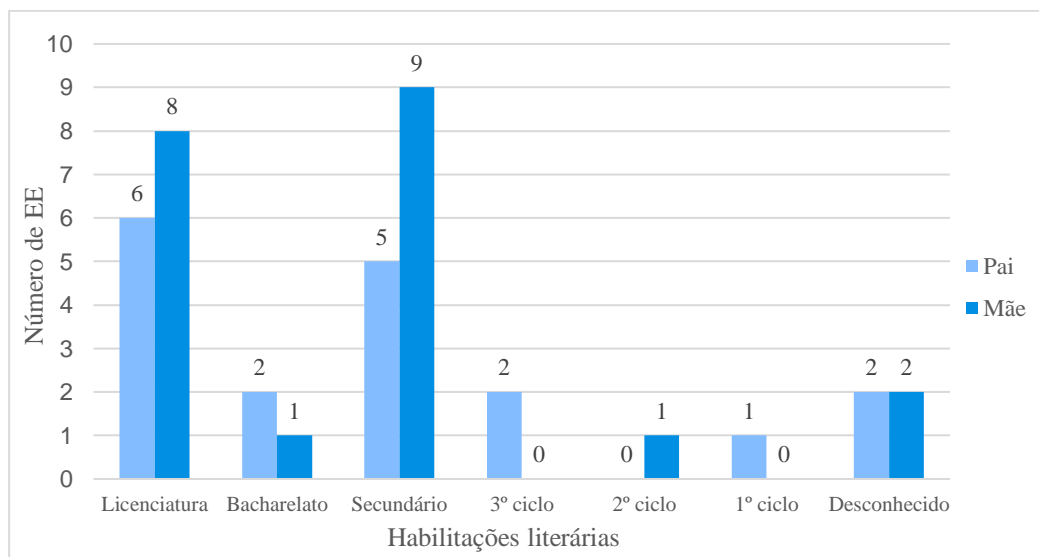


Figura 4: Habilitações literárias dos encarregados de educação dos alunos do 12.º ano.

A maioria dos alunos tem residência no Laranjeiro, localidade de extrema proximidade com a Cova da Piedade, onde se localiza a Escola Secundária António Gedeão. Facilmente, através da análise do gráfico representado na Figura 5, se observa que os restantes alunos se encontram dispersos em zonas de proximidade ou da periferia, como por exemplo, a Sobreda, o Feijó, a Charneca da Caparica ou a Cova da Piedade.

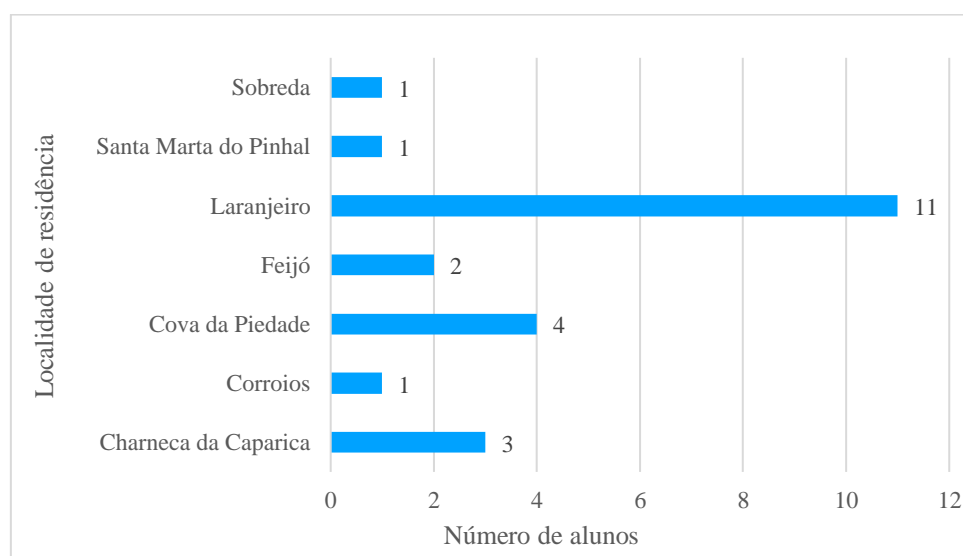


Figura 5: Localidade de residência dos alunos do 12.º ano.



### 3. Prática Pedagógica Supervisionada

#### 3.1. Aulas lecionadas

As aulas lecionadas e supervisionadas ocorreram numa turma do 12.º ano da professora orientadora e numa turma do 7.º ano cuja titular era a professora Ana Peres, professora do Quadro do Agrupamento, que disponibilizou o acompanhamento de uma das suas turmas para possibilitar à professora estagiária o contacto com alunos deste ano de escolaridade, proporcionando assim uma maior diversidade de experiências no âmbito do estágio pedagógico.

Ao longo do ano letivo foram lecionadas catorze aulas: quatro ao 7.º ano e dez ao 12.º ano. Dessas doze aulas, onze foram aulas supervisionadas pelas professoras Rosário Lopes e Maria Helena Santos. A única aula que não foi supervisionada pelas docentes referidas, foi a primeira aula do 7.º ano, que serviu essencialmente para conhecer um pouco melhor a turma, o seu ritmo de trabalho e analisar as principais dificuldades durante a gestão da turma. Na Tabela 6 encontra-se sistematizada a informação relativa às aulas lecionadas pela professora estagiária e que foram supervisionadas.

Tabela 6: Síntese das aulas lecionadas e supervisionadas ao longo do ano letivo.

Período	Ano	Data	Duração	Domínio	Subdomínio
1.º Período	7.º	26-10-2017	50'	Geometria e Medida 7.º ano (GM 7)	Figuras Geométricas
	12.º	30-10-2017	50'	Funções Reais de Variável Real 12.º ano (FRVR12)	Limites e Continuidade
	12.º	07/12/2017	50'	Funções Reais de Variável Real 12.º ano (FRVR12)	Funções Logarítmicas
2.º Período	12.º	31/01/2018	50'	Cálculo Combinatório 12.º ano (CC12)	Triângulo de Pascal
	12.º	01/02/2018	50'	Cálculo Combinatório 12.º ano (CC12)	Binómio de Newton
	12.º	21/02/2018	50'+50'	Probabilidades 12.º ano (PRB12)	Probabilidade Condicionada
	12.º	08/03/2018	50'	Probabilidades 12.º ano (PRB12)	Probabilidade Condicionada
	7.º	08/03/2018	50'	Funções, Sequências e Sucessões 7.º ano (FSS 7)	Funções
3.º Período	12.º	18/04/2018	50'+50'	Números Complexos 12.º ano (NC12)	Introdução aos números complexos
	7.º	30/04/2018	50'	Álgebra 7.º ano (ALG 7)	Equações algébricas
	12.º	03/05/2018	50'	Números Complexos 12.º ano (NC12)	Exponencial complexa e forma trigonométrica dos números complexos

## 3.2. Planos de Aula

Os planos de aula elaborados ao longo do ano letivo mantiveram a mesma estrutura. No início de cada planificação foram explicitadas informações gerais sobre a aula, nomeadamente: domínio, subdomínio, pré-requisitos, sumário, objetivos gerais, objetivos específicos, metas curriculares, materiais a utilizar e avaliação. A avaliação dos alunos considerada nos planos de aula contemplou, além da capacidade de resolução das tarefas propostas em aula, o respeito pelos colegas e pelas professoras, o interesse e empenho na aula e a participação nas atividades desenvolvidas na aula.

Em seguida foram detalhadas as abordagens seguidas no desenvolvimento da aula. Para uma melhor organização e simplificação do plano, a professora estagiária optou por deixar as justificações dos exercícios aplicados, as estratégias alternativas e/ou as observações relevantes em pequenas caixas na margem esquerda de cada página. Esta estratégia revelou-se bastante eficiente uma vez que separou claramente aquilo que deveria ser o desenvolvimento da aula daquilo que eram motivações, objetivos e observações das etapas descritas.

Na elaboração dos planos de aula, foram tidas em conta as características de cada turma, como por exemplo, as principais dificuldades que a professora estagiária detetou do seu acompanhamento diário, os seus interesses, a faixa etária, o desempenho à disciplina, entre outros fatores relevantes para a preparação de uma aula ajustada a uma melhor aprendizagem.

A ordem pela qual foram apresentados os conteúdos nem sempre correspondia à ordem do manual adotado pela escola. Para a preparação da aula, a professora recorreu a diversas fontes de informação, tais como outros manuais, livros técnicos, internet, pois, dessa forma, poderia encontrar estratégias que seriam potencialmente mais eficazes e, assim, proporcionar aos alunos um ambiente de trabalho mais propício às aprendizagens. Por este motivo, nem sempre o manual adotado tinha as estratégias consideradas mais eficientes, pelo que nem sempre foi a escolha seguida.

De modo geral, a professora começou sempre os seus planos de aula com uma motivação para a matéria a lecionar nessa aula. Para tal, optou por apresentar questões que seriam respondidas no final da aula ou inquirir os alunos sobre dúvidas que a matéria pudesse suscitar ou levantar questões que até agora os matemáticos ainda não conseguiram responder, entre outros exemplos de estratégias utilizadas para captar a atenção dos alunos.

É importante referir que os exemplos considerados na introdução de um determinado tópico tentaram sempre ser o mais simples e claros possível para que fosse imediata a compreensão pelos alunos. No entanto, a professora tentou diversificar o grau de dificuldade dos exemplos e exercícios, de modo a conseguir chegar às diferentes exigências de cada aluno. Deste modo, seria possível conseguir ter a atenção e motivação de todos os alunos na aula.

Relativamente à escolha dos exemplos e exercícios, além do aumento progressivo do grau de dificuldade, a professora estagiária teve o cuidado de, numa situação inicial, não interrelacionar muitos conteúdos, uma vez que isso poderia dificultar a aplicação da matéria central. A professora procurou

sempre encontrar estratégias diversificadas para a apresentação dos exemplos, exercícios ou, até, dos próprios conteúdos das aulas, recorrendo ao quadro branco, à projeção de slides, à partilha de fichas de trabalho elaboradas pela docente, etc.

Um dos pontos fulcrais na preparação da aula da professora foi a participação dos alunos nesta, procurando-se sempre, na planificação, indicar “momentos chave” para pedir a colaboração dos alunos, conseguindo, desse modo, captar a sua atenção, motivando-os para a aula. Acima de tudo, esta poderia ser uma forma de identificar as dúvidas dos alunos que se revelassem pouco participativos. Na verdade, a turma do 12.º ano revelou-se sempre bastante mais participativa nas aulas destinadas à resolução de exercícios do que nas aulas destinadas à exposição dos conteúdos. Isto porque, na sua maioria, os alunos desta turma eram essencialmente interessados em serem bem sucedidos nas provas de avaliação ao invés de serem realmente curiosos pelos conteúdos.

Além disso, uma preocupação inerente à preparação de qualquer aula foi a realização de uma pesquisa histórica sobre o tema, pois a professora estagiária acredita que a introdução da história da matemática na sala de aula permite que os alunos tenham outra perspetiva do conhecimento e, em particular, do conhecimento matemático, que é muitas vezes associado àquilo que “alguém” fez e que implementou para que todos os alunos aprendessem.

### 3.3. A turma do 12.º ano

A disciplina de matemática A na turma do 12.º ano representava, no horário semanal, um total de 7 tempos letivos de 50 minutos cada, distribuídos em quatro dias semanais, tal como se pode verificar na Tabela 7.

Tabela 7: Aulas de matemática A da turma do 12.º ano.

Horas	Segunda-Feira	Terça-feira	Quarta-Feira	Quinta-Feira	Sexta-Feira
08:15 – 09:05					
09:05 – 10:05	matemática A			matemática A	
10:20 – 11:10	matemática A		matemática A	matemática A	
11:20 – 12:10		matemática A	matemática A		

Os critérios de avaliação aplicados ao 12.º ano do Agrupamento de Escolas António Gedeão foram distribuídos em relação à classificação final da seguinte forma:

- Testes de avaliação – 85%;
- Trabalho individual – 10%;
- Trabalho de casa e trabalho em aula – 5%.

É importante relembrar que, dada a natureza cumulativa que a disciplina de Matemática apresenta, todos os testes de avaliação realizados ao longo do ano letivo avaliaram não só as novas

matérias lecionadas como outras previamente avaliadas. Apesar desta regra, os conteúdos avaliados em cada teste foram previamente apresentados e/ou acordados entre a professora e os alunos.

### 3.3.1. Primeiro Período

O início do primeiro período foi dedicado, principalmente, ao tópico de Estatística, tanto de 10.º como de 11.º ano (EST10 e EST11). Uma dificuldade sentida em diversas escolas do país e comunicada em diferentes fontes de informação, foi a gestão do novo programa de matemática A e das metas curriculares. Como forma de recuperar os tópicos de Estatística que não foram lecionados nos anos letivos anteriores, a área disciplinar decidiu iniciar o 12.º ano deste modo. Posteriormente, foi lecionado o tema de Funções Reais de Variável Real (FRVR12), no qual também se incluiu a conclusão da mesma temática do ano letivo anterior (FRVR11). Ainda antes do período terminar, introduziu-se o domínio das Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas (FEL12), o qual apenas foi concluído durante o 2.º período.

#### 3.3.1.1. Avaliação

Neste período letivo realizaram-se, essencialmente, três momentos de avaliação que corresponderam a uma ficha de avaliação de sessenta minutos e dois testes de avaliação de duração aproximada de cento e dez minutos. Os instrumentos de avaliação encontram-se sistematizados na Tabela 8.

Tabela 8: Instrumentos de avaliação aplicados no 1.º período.

<b>Data</b>	<b>Instrumento de Avaliação</b>	<b>Domínio Avaliado</b>
<b>02/10/2017</b>	Ficha de Avaliação	Estatística
<b>25/10/2017</b>	Teste de Avaliação	Funções Reais de Variável Real
<b>06/12/2017</b>	Teste de Avaliação	Funções Reais de Variável Real + Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas

#### 3.3.1.2. Aulas lecionadas

Durante o primeiro período a professora estagiária lecionou dois tempos de cinquenta minutos à turma do 12.º ano, assistidos pela professora orientadora e titular da turma, professora Rosário Lopes, pela professora Doutora Maria Helena Santos e pela colega de estágio, Linda Cardoso.

### 3.3.1.2.1. Primeira Aula

A primeira aula lecionada pela professora estagiária à turma do 12.º ano realizou-se a 30 de outubro de 2017, segunda-feira, no primeiro de dois tempos letivos dos alunos. O conteúdo trabalhado nesta aula foi o teorema das funções enquadadas e respetiva demonstração, seguidos da resolução de alguns exercícios de aplicação. Este conteúdo faz parte do subdomínio Limites e Continuidade, pertencente ao domínio das Funções Reais de Variável Real (FRVR12).

#### **Preparação da aula**

Durante a planificação da aula, a professora estagiária foi mantendo um contacto regular com a professora titular da turma, a professora Rosário Lopes, a propósito da organização da aula e da elaboração do respetivo plano. Desde início, foi consensual que a metodologia a utilizar na aula em causa passaria por fazer a demonstração do teorema das funções enquadadas e, seguidamente, fazer alguns exercícios com os alunos.

Uma das primeiras preocupações durante a elaboração do plano de aula foi a motivação dos alunos para o estudo do tema, neste caso, o estudo do teorema das funções enquadadas, uma vez que tinha sido um dos pontos a melhorar referidos pela professora Rosário Lopes, durante a Unidade Curricular “Introdução à Prática Profissional”, realizada no ano letivo transato. Neste sentido, a professora estagiária planeou iniciar a aula afirmando que este teorema poderia dar resposta a algumas dificuldades que pudessem surgir com o cálculo de alguns limites de funções e, por forma a ilustrar esta questão, poderia ser dado um exemplo de um limite de uma função, a que os alunos dariam resposta no final da aula, já depois de terem aprendido e aplicado o teorema das funções enquadadas.

Outra preocupação apresentada pela professora estagiária durante a preparação da aula foi a apresentação dos conteúdos já lecionados que seriam importantes para a aula, em particular, para a demonstração do teorema das funções enquadadas. Destes conteúdos, a professora considerou que seria relevante recordar o teorema das sucessões enquadadas e a definição de limite de uma função segundo Heine. Relativamente ao primeiro, optou por colocar como revisão antes de enunciar o teorema, pois o teorema das funções enquadadas seria visto como uma generalização do referido teorema que já tinha sido lecionado pela professora titular algumas aulas antes. Quanto ao segundo conteúdo, embora a professora estagiária tivesse inicialmente considerado fazer referência logo após o teorema revisto, por sugestão da professora Rosário Lopes, decidiu apresentá-lo apenas depois de enunciar o teorema das funções enquadadas, uma vez que este não estava diretamente relacionado com o seu enunciado, mas antes com a sua demonstração, pelo que faria mais sentido ser apresentado imediatamente antes desta.

Por último, a professora estagiária teve em consideração a escolha de exemplos e exercícios mais adequados para realizar na aula com os alunos, pois seria importante começar com exercícios de simples aplicação do teorema das funções enquadadas, ao mesmo tempo que seria relevante fazer algumas considerações importantes, por forma a alertar os alunos dos cuidados a ter durante a resolução

de exercícios de aplicação do teorema. Assim, a professora optou por considerar três exemplos distintos, em que cada um deles envolvia os limites de uma função para valores de  $x$  de diferente natureza, nomeadamente,  $-\infty$ ,  $+\infty$  e uma constante. Além destes exemplos, a professora estagiária considerou no plano de aula algumas propostas de exercícios a realizar em aula e extra-aula.

### **Desenvolvimento da aula e considerações**

Tal como tinha sido planificado, a professora estagiária começou a aula recorrendo a um exemplo de motivação, por forma a cativar a atenção dos alunos. Seguidamente reviu o teorema das sucessões enquadradas e referiu as condições em que este pode ser aplicado. Depois disso, foi enunciado o teorema das funções enquadradas, para o qual foi pedida a colaboração dos alunos para a leitura do seu enunciado. Ainda antes da demonstração do teorema, a professora lembrou a definição de limite segundo Heine, que seria importante para a demonstração. Prosseguiu solicitando a colaboração dos alunos para a demonstração do teorema e chamando à atenção para os pontos que considerou mais importantes.

Depois de esclarecidas as dúvidas entretanto levantadas, foram realizados alguns exemplos com os alunos para aplicação do teorema das funções enquadradas. Da observação da turma durante este processo, ficou claro que os alunos tinham compreendido este teorema, dando cumprimento a um dos objetivos específicos preconizados no plano de aula. No final da aula, a professora retomou ao exemplo inicial, pedindo aos alunos que o resolvessem recorrendo ao teorema das funções enquadradas.

A leção da aula decorreu de acordo com o plano elaborado previamente e os alunos corresponderam, maioritariamente, às expectativas da professora, mostrando-se colaborantes e recetivos durante toda a aula. No final da aula, a professora estagiária reuniu com as professoras orientadoras e com a colega de estágio para analisar e discutir a aula lecionada. Tanto as professoras como a colega de estágio consideraram que, globalmente, a aula tinha corrido bem. No entanto, a professora Rosário Lopes e a professora Doutora Maria Helena Santos fizeram algumas considerações relativamente aos pontos a melhorar, no que diz respeito à organização do quadro e à gestão das intervenções dos alunos na aula:

- Organização do quadro. A professora estagiária deveria ter optado por não deixar em destaque durante toda a aula o primeiro limite que apresentou, pois acabou por perder muito espaço, o que condicionou a gestão posterior dos conteúdos a explicitar no decorrer da aula.
- Intervenção dos alunos na aula. A professora deveria ter corrigido a leitura realizada por um dos alunos do teorema das funções enquadradas. Embora a professora estagiária tenha feito sempre a correção à forma como o aluno leu  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ , a professora titular considerou que a chamada de atenção deveria ter sido mais eficiente, pois o aluno em vez de ler “**limite** de  $g(x)$  quando  $x$  tende para  $a$ ” continuou a ler, após as diversas chamadas de atenção, “**lim** de  $g(x)$  quando  $x$  tende para  $a$ ”. Além disso, deveria ter chamado à atenção



uma das alunas quando disse a definição de limite segundo Heine com algumas incorreções. Embora a professora estagiária tenha percebido que a ideia da aluna não estava totalmente correta e, posteriormente, tenha pedido que lesse a definição do livro, deveria ter reforçado as correções relativas à definição que a aluna havia referido.

Além disso, as professoras reforçaram alguns aspetos relativamente ao desenvolvimento da aula e à lecionação de alguns conteúdos:

- Demonstração do teorema das funções encastradas. A professora estagiária deveria ter explicitado a “Hipótese” e a “Tese” quando estava a fazer a demonstração com os alunos, por forma a que ficasse mais explícito “o que se sabe (?)” e “o que se pretende demonstrar (?)”. A professora estagiária considerou no seu plano de aula questionar os alunos, durante a demonstração, relativamente a estes pontos, mas não teria pensado na possibilidade de deixar registado no quadro durante a demonstração, aspeto que as professoras orientadoras consideraram importante. Além disso, as professoras consideraram que durante a demonstração a implicação  $\forall x \in D, g(x) \leq f(x) \leq h(x) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (g(u_n)) \leq (f(u_n)) \leq (h(u_n))$  carecia de uma maior justificação, pois foi convicção das docentes que muitos alunos não terão compreendido a justificação embora não se tenham manifestado.
- Cálculo das restrições para os valores de  $x$  no enquadramento. Ao proceder ao enquadramento da função era importante ter chamado à atenção dos alunos para os procedimentos a ter em conta no processo de identificação das restrições da variável  $x$ . Na identificação dessas restrições devia ter sido dado destaque ao limite que se pretendia calcular e à variação de  $x$ . Por exemplo, no cálculo de um limite quando  $x$  tende para mais infinito, o facto de  $x$  tender para mais infinito permitia-nos afirmar que  $x > 0$ . A partir desta condição, e à medida que se efetuava o enquadramento da função, ir-se-ia definindo o intervalo de variação de  $x$  onde o enquadramento é válido, inversamente ao processo explanado durante a aula. Durante o cálculo do limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(3+\cos^2 x)}{x+50}$ , a professora referiu que para  $x > -50$ , se tem  $x + 50 > 0$ , mas deveria ter referido que uma vez que  $x > 0$ , ter-se-ia,  $x + 50 > 0$ , pois  $x$  é suficientemente grande, dado que se pretendia calcular o limite em mais infinito. Do exposto, e das considerações feitas pelas professoras relativamente a este ponto, considera-se que um dos objetivos específicos contemplados no plano de aula não foi totalmente atingido, uma vez que subsistiam dúvidas sobre a dificuldade que os alunos poderiam manifestar no processo de enquadramento de uma função e da identificação das restrições da variável.

### Autoavaliação

A professora estagiária sentiu-se confiante perante a turma, uma vez que já conhecia a maioria dos alunos do ano letivo anterior e colaborou sempre com a professora titular aquando da parte prática

da aula. Esta interação permitiu desenvolver um trabalho de proximidade com os alunos contribuindo para melhorar a relação pedagógica com a turma. Apesar disso, no início da aula, a professora sentia-se um pouco ansiosa, pois não sabia como se comportariam os alunos na presença da professora estagiária perante uma interação mais teórica, mas ao longo da aula a professora ficou mais confortável e tranquila.

Ao encontro da opinião das professoras orientadoras, a professora estagiária considera que a aula foi produtiva e que a maioria dos alunos compreendeu o teorema em destaque na aula lecionada. A professora estagiária considerou pertinentes todas as considerações feitas pelas professoras realçando a sua importância na leção das aulas subsequentes.

### 3.3.1.2.2. Segunda Aula

A segunda aula lecionada pela professora estagiária à turma do 12.º ano realizou-se a 7 de dezembro de 2017, quinta-feira, no primeiro de dois tempos letivos dos alunos. O conteúdo desta aula foi, essencialmente, as propriedades algébricas das funções logarítmicas, tendo sido algumas acompanhadas das respetivas demonstrações. Este conteúdo enquadra-se no domínio Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas (FEL12), mais precisamente do subdomínio Funções Logarítmicas.

#### **Preparação da aula**

Na elaboração do plano de aula, a professora estagiária contactou regularmente com a professora titular da turma, a professora Rosário Lopes, a propósito da estrutura que deveria ser adotada no desenvolvimento da aula. Efetivamente, foi consensual entre as professoras que na aula deveriam ser enunciadas as propriedades algébricas das funções logarítmicas e feitas algumas das suas demonstrações. As professoras consideraram que não seria relevante para a aprendizagem dos alunos realizar em aula todas as demonstrações, uma vez que as estratégias utilizadas entre elas eram muito semelhantes, pelo que, em conformidade com o que é exigido pelas metas curriculares, foram apenas selecionadas algumas propriedades para demonstrar.

As professoras também estiveram de acordo em deixar como trabalho de casa as demonstrações que não fossem feitas em aula, para que os alunos trabalhassem com as propriedades lecionadas. Como forma de cumprir o anteriormente referido, a professora estagiária considerou no plano de aula as propriedades por uma ordem diferente daquela que consta no manual adotado, para que as propriedades que os alunos teriam de demonstrar em casa pudessem ser facilmente realizadas a partir da análise daquelas que foram demonstradas na aula.

Uma preocupação tida em conta pela professora foi a criação de exemplos que contemplassem erros comumente cometidos pelos alunos e, além disso, exercícios de aplicação com vários graus de dificuldade, ou seja, uns mais simples e outros mais desafiantes. Nessa linha, a professora estagiária selecionou e construiu alguns exercícios que abordassem situações desse tipo, como por exemplo, o

produto de logaritmos com a mesma base ou a divisão de logaritmos com a mesma base, como forma de chamar à atenção que não poderia ser feito o logaritmo de uma soma ou o logaritmo de uma diferença como produto e divisão de logaritmos com a mesma base, respetivamente.

### **Desenvolvimento da aula e considerações**

A professora iniciou a aula fazendo uma breve revisão sobre a composta da função logarítmica com a função exponencial e vice-versa, apresentando, ainda alguns exercícios de aplicação. Em seguida, enunciou as propriedades algébricas das funções logarítmicas, nomeadamente: a soma de logaritmos com a mesma base, o logaritmo do inverso, a diferença de logaritmos com a mesma base e o logaritmo da potência de um número. Em algumas das propriedades, à medida que ia enunciando, a professora ia fazendo a respetiva demonstração, ou dedução, no caso das propriedades que se demonstravam a partir das anteriores.

A professora, em simultâneo com a propriedade, escrevia em linguagem natural o significado das expressões e, além disso, ia realizando alguns exemplos com os alunos para aplicação das propriedades. Da manifestação demonstrada pelos alunos na aula, a professora considera que o objetivo específico de aplicação das principais propriedades algébricas das funções logarítmicas foi cumprido.

A aula desenvolveu-se de acordo com o plano elaborado embora não tivesse sido possível concluí-lo, deixando a última propriedade - a propriedade da mudança de base - e a aplicação de alguns exercícios mais desafiantes para a aula seguinte. No final da aula, a professora estagiária reuniu com a colega de estágio e com as professoras orientadoras que fizeram algumas sugestões de melhoria da aula lecionada, nomeadamente:

- Reforçar a função composta da função logarítmica e exponencial como a função identidade. As professoras consideraram que seria importante fazer um reforço maior das propriedades vistas na aula anterior, fazendo referência à função composta entre a função logarítmica e a função exponencial como a função identidade. Embora, como já referido, tivesse sido abordado na aula anterior, as professoras consideraram que teria sido útil dar mais enfoque, pois os alunos poderiam ainda não ter assimilado, uma vez que é uma propriedade muito importante e apenas tinha sido vista na aula anterior.
- Realçar as condições em que são válidas as propriedades. Relativamente às propriedades enunciadas, as professoras consideraram que deveriam ter sido reforçadas, para cada propriedade, as suas condições, isto é, explicitar em cada uma delas a variação das variáveis salientando a importância das restrições impostas. As professoras frisaram ainda que, muitas vezes, os alunos cometiam erros nas restrições da base ou do argumento da função logarítmica, pelo que era de extrema importância ser feita esta chamada de atenção. Deste modo, embora as professoras tenham considerado que os alunos compreenderam as provas realizadas, o que vai ao encontro do segundo objetivo específico da aula, os alunos poderão

não ter compreendido efetivamente as condições para as quais as propriedades são válidas, pelo que o referido objetivo não foi plenamente atingido.

- Enfatizar que as propriedades apenas se verificam para logaritmos com a mesma base. As professoras referiram que as bases da função logarítmica são de extrema importância, pelo que o professor deverá sempre, principalmente numa fase inicial, chamar muito à atenção dos alunos de que as propriedades enunciadas apenas se verificam para logaritmos com a mesma base. Além disso, é fundamental não deixar registos escritos que omitam as restrições das propriedades enunciadas, uma vez que estas só fazem sentido para funções logarítmicas com as mesmas bases. Nomeadamente, quando a professora escreveu, de forma simplificada, a leitura em linguagem corrente das propriedades enunciadas, esta não deveria ter deixado de referenciar que os logaritmos tinham de ter, necessariamente, a mesma base, pois, caso contrário, as propriedades não seriam válidas.
- Atender às sugestões dadas pelos alunos. As professoras aconselharam a dar maior atenção à participação dos alunos no desenvolvimento da aula. Embora a professora estagiária tenha procurado ter em atenção o raciocínio dos alunos, em momentos de maior stress e ansiedade poderá ter sido mais difícil aceitar as sugestões dos alunos. Estas situações ocorreram, algumas das vezes, pelo facto de a professora estagiária não estar à espera do tipo de raciocínio utilizado ou por não ir ao encontro do que tinha previamente planificado, isto é, podia desviar-se do conteúdo que se pretendia explorar. Este ponto deve, sem dúvida, ser melhorado, uma vez que os alunos devem ser a parte central numa aula. É muito importante que os alunos sintam que as suas vozes são ouvidas e consideradas para o progresso da aula. Os alunos devem ser agentes ativos numa sala de aula, pelo que o professor deve estar sempre desperto para as suas opiniões, dúvidas e sugestões.

Os aspetos referidos não foram tão bem conseguidos pela professora estagiária possivelmente pela sua menor experiência. Efetivamente, foram críticas muito relevantes, pois permitiram à professora não apenas tomar maior consciência das lacunas que a aula poderá apresentar para os alunos como também compreender os pontos que normalmente podem suscitar maiores dificuldades aos alunos.

### **Autoavaliação**

A professora estagiária considera que esta foi uma aula de grande aprendizagem, uma vez que foram apontados vários aspetos para ter em consideração na sua atividade enquanto docente, nomeadamente o reforço das restrições da base e dos argumentos da função logarítmica, considerações que o professor deverá reforçar constantemente, principalmente nas aulas iniciais sobre a matéria em causa. A professora aprendeu que, acima de tudo, a abordagem de novos conteúdos deverá ser acompanhada de um rigor superior ao que é exigido, uma vez que nesta altura os alunos ainda não conhecem os conceitos e a primeira abordagem poderá condicionar toda a aprendizagem dos alunos.

Além disso, a professora estagiária consciencializou-se da importância de dar voz aos alunos, aproveitando ao máximo as suas contribuições para que estes sintam que também são construtores do conhecimento. Por outro lado, as intervenções dos alunos poderão permitir a identificação, com maior exatidão, de algumas das suas dificuldades na compreensão dos conteúdos que estão a ser lecionados. Uma vez que o silêncio dos alunos nem sempre corresponde à ausência de dificuldades, uma maior atenção às suas intervenções é essencial pois, não só irá permitir que estes se sintam mais motivados para acompanhar a aula, como também irá permitir ao professor compreender melhor alguns dos seus raciocínios. Desta forma o professor poderá esclarecer, com maior eficácia, as dificuldades dos alunos.

Globalmente a professora estagiária considera que a aula foi perceptível para os alunos e a maioria deles acompanhou os conteúdos lecionados. No entanto, é necessário enriquecer a aula com mais exemplos que possam contribuir para aumentar a capacidade e a compreensão dos alunos. Estes exemplos devem recair sobre situações cuja resolução permita esclarecer os erros mais frequentes dos alunos e para os quais o professor deve chamar à atenção. Nesta aula deviam ter sido apresentados mais exemplos que incluíssem a soma de logaritmos de bases diferentes (ou outra das propriedades) ou a potência de números negativos. Além disso, seria importante mostrar aos alunos, em que condições é que a propriedade da potência não pode ser aplicada. Um professor deve, em todos os teoremas que apresenta em aula, referir as suas condições (nomeadamente a restrição das variáveis do teorema), uma vez que isso leva à melhor construção do conhecimento por parte dos alunos.

### 3.3.2. Segundo Período

Assim como referido anteriormente, o segundo período iniciou-se com a conclusão do domínio Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas (FEL12). Em seguida, lecionaram-se os temas Cálculo Combinatório (CC12) e Probabilidades (PRB12). A opção de deixar as temáticas de CC12 e PRB12 apenas para o 2.º período, embora pouco frequente nas escolas, foi discutida e analisada na área disciplinar. Esta estratégia poderá ser particularmente interessante na medida em que, das experiências das docentes que lecionam este ano de escolaridade, existe a perceção de que o desempenho dos alunos no exame nacional, no que se refere a estas temáticas não corresponde, muitas vezes, ao trabalho que foi desenvolvido ao longo do ano letivo. Existindo a convicção de que a lecionação no início do ano letivo poderá ter um efeito negativo neste desempenho. Além disso, se os temas do Cálculo Combinatório e das Probabilidades fossem introduzidos no início do ano letivo, existiria a necessidade de os rever/avaliar ao longo do ano. Desta forma, o peso destes conteúdos na avaliação do 12.º ano seria desequilibrado face àquele que tem no exame nacional. Ainda neste período, deu-se início ao estudo da Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI12), que se continuou a desenvolver no 3.º período.

### 3.3.2.1. Avaliação

Os alunos concretizaram, neste período, três elementos de avaliação, nomeadamente uma ficha de avaliação, com a duração de sessenta minutos e dois testes de avaliação. O primeiro teste teve a duração de cem minutos com dez minutos de tolerância e o segundo, que foi comum a todas as turmas de 12.º ano, teve a duração de uma hora e meia, com trinta minutos de tolerância. A informação relativa aos instrumentos de avaliação encontra-se sistematizada na Tabela 9.

Tabela 9: Instrumentos de avaliação aplicados no 2.º período.

Data	Instrumento de Avaliação	Domínio Avaliado
17/01/2018	Ficha de Avaliação	Funções Reais de Variável Real + Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas
07/02/2018	Teste de Avaliação	Funções Reais de Variável Real + Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas + Cálculo Combinatório + Probabilidades
19/03/2018	Teste de Avaliação	GLOBAL (tudo o que foi lecionado até então)

### 3.3.2.2. Aulas lecionadas

No segundo período a professora estagiária lecionou cinco tempos de cinquenta minutos à turma do 12.º ano, assistidas pela professora orientadora, professora Rosário Lopes, pela professora Doutora Maria Helena Santos e pela colega de estágio, Linda Cardoso. Os dois primeiros blocos de cinquenta minutos dizem respeito a duas aulas planeadas para serem lecionadas em dias consecutivos, na quarta e na quinta-feira da mesma semana. Os dois blocos seguintes foram lecionados no mesmo dia. A última aula lecionada, não estava prevista inicialmente e resultou do não cumprimento do plano elaborado para a aula anterior, considerando-se importante a professora estagiária dar continuidade a esta aula.

#### 3.3.2.2.1. Terceira Aula

A terceira aula lecionada pela professora estagiária à turma do 12.º ano foi assistida pela professora orientadora e titular da turma, professora Rosário Lopes, pela professora Doutora Maria Helena Santos e pela colega de estágio, Linda Cardoso. A aula lecionada realizou-se a 31 de janeiro de 2018, quarta-feira, no segundo de dois tempos letivos dos alunos. O conteúdo desta aula foi, essencialmente, o triângulo de Pascal, do qual se deduziram algumas propriedades e fizeram algumas das demonstrações.

#### Preparação da aula

Durante a preparação da aula, a professora estagiária teve particular atenção à elaboração de um plano que concentrasse as principais ideias associadas ao triângulo de Pascal e que constituísse uma

motivação ao estudo do tema. Além disso, embora não fosse ocupar uma parte central da aula, a professora preocupou-se, como é habitual, com a pesquisa histórica do tema, de modo a partilhar com os alunos a origem deste conteúdo matemático.

A professora contactou com a professora Rosário Lopes relativamente à sua vontade de seguir uma abordagem mais exploratória para iniciar o tópico da aula. A professora titular ficou agradavelmente interessada na ideia considerando que podia ser muito interessante para os alunos iniciar este estudo com a exploração de padrões e regularidades no triângulo de Pascal.

As professoras distinguiram, ainda, as propriedades que deveriam ser acompanhadas de demonstração daquelas que apenas careciam de uma simples justificação. Além disso, analisaram algumas questões de linguagem que eram extremamente delicadas e com as quais a professora estagiária deveria ter especial cuidado, pois alguns termos facilmente se poderiam tornar ambíguos e confusos, nomeadamente o facto de o índice da linha presente na simbologia  ${}^nC_p$  não corresponder exatamente à ordem da linha no triângulo de Pascal.

Assim, a professora estagiária teve particular atenção a todos os tópicos referidos anteriormente durante a elaboração do seu plano de aula, por forma a preparar-se de forma mais rigorosa possível, contemplando todos os pontos discutidos com a docente da turma.

### **Desenvolvimento da aula e considerações**

Tal como tinha sido a sua intenção desde o início, a professora estagiária começou a aula dividindo os alunos em grupos de 3 ou 4 alunos. Os grupos foram definidos previamente, tendo como principais critérios os seguintes: escolher pelo menos um aluno com gosto por atividades de exploração matemática e evitar juntar alunos habitualmente muito conversadores entre eles.

Os alunos empenharam-se bastante na descoberta de padrões no triângulo de Pascal e foi extremamente interessante verificar que tinham descoberto muitas propriedades para além das mais evidentes. Depois de algum tempo dado para os alunos, em grupo, encontrarem algumas regularidades no triângulo de Pascal, a professora procedeu à partilha dos resultados em turma. Ao mesmo tempo que o fez, reforçou as 3 propriedades que estão presentes nas metas curriculares, o que vai ao encontro do primeiro objetivo específico da aula. Globalmente os alunos tinham descoberto, pelo menos, estas propriedades. Aparentemente, o facto de terem sido os alunos a encontrar as propriedades no triângulo, em vez de terem sido expostas pela professora, fez com que estes manifestassem maior empenho ao longo de toda a aula. Esta abordagem também poderá permitir que os alunos saibam construir o triângulo de Pascal de forma mais eficiente, pelo que o objetivo específico que diz respeito à construção do triângulo de Pascal terá sido bem concretizado.

Ainda a propósito das propriedades, a professora mostrou uma página de Excel que tinha elaborado, onde coloriu os números ímpares do triângulo de Pascal, mostrando aos alunos que tinha uma parte de um triângulo de *Sierpinski* (Figura 6), o que, novamente, suscitou o interesse dos alunos e lhes

mostrou uma “curiosidade” acerca da matemática, pois esta é uma das formas elementares da geometria fractal.

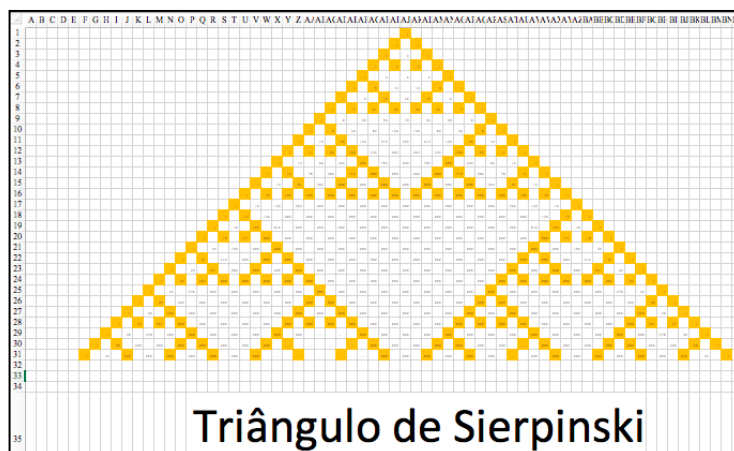


Figura 6: Representação do triângulo de Sierpinski através do triângulo de Pascal.

Depois de verificadas as propriedades, a professora apresentou o triângulo de Pascal aos alunos e retratou breves referências históricas a propósito daquele que é conhecido, por nós e mais alguns povos, dessa forma, mas que não é uma forma exclusiva, havendo variadíssimos nomes que lhe são atribuídos, dependendo dos povos. A professora estagiária valoriza esta abordagem, pois permite que os alunos compreendam as origens de alguns dos conteúdos que são lecionados neste nível de ensino. Desta forma criam-se as condições para que os alunos tenham uma melhor percepção da origem do conhecimento matemático, o que permite uma maior proximidade a esta ciência e, conseqüentemente, uma maior vontade de aprender.

Após a apresentação do triângulo de Pascal, a professora procedeu à demonstração das propriedades referidas anteriormente. Estas demonstrações serviram para que os alunos agilisassem os seus cálculos através da definição de combinação. Durante todas as demonstrações, a professora procurou envolver a turma no processo, pedindo a sua colaboração para o efeito. Pela manifestação dos alunos, a professora acredita que estes terão compreendido as demonstrações realizadas, pelo que este objetivo específico também foi alcançado. Ainda antes da aula terminar, a professora abordou a noção de soma dos elementos de uma linha, onde fez referência à cardinalidade de conjuntos, já abordada em aulas anteriores. Dado que a professora não conseguiu ter tanto tempo quanto gostaria para introduzir esta noção, um dos objetivos específicos da aula poderá não ter sido tão bem conseguido, uma vez que alguns alunos poderão não ter compreendido tão bem que a soma dos elementos da linha de ordem  $n$  do triângulo de Pascal é  $2^n$ , assim como também poderão não ter ficado com a ideia clara da relação entre a soma dos elementos de uma linha do triângulo de Pascal com a cardinalidade de um subconjunto de um conjunto de  $n$  elementos, pelo que foi considerado um ponto a retomar na aula seguinte.

A aula foi ao encontro do que a professora estagiária tinha explicitado no plano, embora não tenha sido possível resolver o “jogo” que tinha sido previamente planificado. Este jogo consistia num



conjunto de dez questões de escolha múltipla que tinham sido elaboradas para finalizar a aula, que deviam ser resolvidas pelos mesmos grupos que realizaram a primeira atividade e que daria resposta ao último objetivo específico da aula, a resolução de problemas envolvendo as propriedades do triângulo de Pascal. Esta atividade foi deixada para a aula seguinte, por forma a conseguir desenvolvê-la com toda a profundidade com que tinha sido prevista.

No final da aula, a professora estagiária reuniu com as professoras orientadoras e com a colega de estágio, por forma a discutir os pontos positivos e a melhorar relativamente à aula lecionada. Globalmente as professoras consideraram muito interessante e apelativa a abordagem ao tema, que tinha cativado a atenção dos alunos e tinha sido clara para todos. Ainda assim, as professoras reforçaram alguns aspetos que devem ser tidos em consideração, nomeadamente:

- Encurtar alguns minutos na atividade de exploração. Uma das professoras orientadoras considerou que, eventualmente, poderia ter reduzido dois ou três minutos na primeira tarefa proposta aos alunos. Apesar disso, a professora considerou que era uma atividade importante e que exigia algum tempo de exploração por parte dos alunos, pelo que não tinha sido um aspeto negativo no desenvolvimento da aula.
- Chamar mais à atenção dos alunos quanto aos abusos de linguagem. Embora as professoras tenham considerado que os alunos não ficaram com quaisquer dúvidas quanto à linguagem utilizada, é um ponto que deve ser melhorado. Apresentam-se a seguir dois exemplos de intervenções de alunos relativamente às quais a professora deveria ter intervindo. O primeiro caso sucedeu quando um aluno se referiu aos primeiros e últimos elementos das linhas do triângulo de Pascal como “extremidades” do triângulo. Tal como referido, embora todos os alunos tenham compreendido ao que o colega se estava a referir, a professora deveria ter o cuidado de alertar os alunos para a utilização de uma linguagem rigorosa e cuidada. A segunda situação ocorreu quando a professora fazia referência à posição do elemento na linha e ao número da linha. As professoras consideraram que a linguagem, em certo momento, terá ficado um pouco confusa e ambígua, pois a posição da linha foi confundida com o valor de  $n$  no elemento  ${}^nC_p$ . As professoras concordaram que este ponto poderá não ter ficado tão bem realçado, pelo que teria sido importante reforçar que o primeiro valor de  $n$  é zero, pelo que não coincide com a ordem na linha primeira.
- Enfatizar que os exemplos não concretizam a generalização e é necessário valorizar a prova. No caso desta aula em concreto, a professora estagiária deveria ter realçado a passagem do triângulo de Pascal para a sua forma com combinações, com base nas propriedades já provadas.
- Desvalorizar passagens demasiado detalhadas ao nível do 12.º ano. Uma das professoras realçou que não teria sido necessário fazer uma das passagens da demonstração, por ser demasiado trivial. A professora estagiária concretizou a passagem por receio que alguns

alunos, distraídos ou confusos, não compreendessem o cálculo em questão. No entanto, é totalmente verdadeiro que os alunos deverão gradualmente assumir algum compromisso, responsabilidade e autonomia perante as aulas a que assistem.

### **Autoavaliação**

Depois de concluída a aula, a professora estagiária sentiu que esta tinha sido muito entusiasmante para os alunos e que estes tinham conseguido aprender maioritariamente aquilo que tinha sido proposto para a aula. A professora considerou a primeira tarefa bastante relevante para a motivação e aprendizagem do conteúdo em causa, pois as atividades de cariz exploratório, tendem a marcar mais os alunos e, conseqüentemente, a contribuir para uma melhor aprendizagem.

A professora estagiária considerou que as sugestões feitas pelas professoras orientadoras, estavam de acordo com as ocorrências da aula, destacando a importância de ter uma linguagem clara e rigorosa, que facilitará a compreensão dos alunos e servirá de exemplo para que estes utilizem a linguagem matemática de forma correta. É de acrescentar, ainda, que é extremamente relevante chamar à atenção dos alunos para a importância da demonstração, pois é com esta que se torna possível generalizar os conceitos que se compreendem intuitivamente. A professora estagiária considera que, eventualmente, teria sido mais benéfico não abordar a soma dos elementos de uma linha do triângulo de Pascal, uma vez que não foi possível fazê-lo com o detalhe necessário, e optar por realizar um ou dois exercícios. Desta forma, seria possível identificar algumas das dificuldades dos alunos na utilização do triângulo de Pascal e das suas propriedades. No entanto, é possível que esta reflexão tenha surgido pelo facto de, no dia imediatamente a seguir, os alunos terem apresentado alguma dificuldade nos exercícios de aplicação do triângulo de Pascal.

### **3.3.2.2.2. Quarta Aula**

A quarta aula lecionada pela professora estagiária à turma do 12.º ano foi assistida pela professora orientadora e titular da turma, professora Rosário Lopes, pela professora Doutora Maria Helena Santos e pela colega de estágio, Linda Cardoso. A aula lecionada realizou-se a 1 de fevereiro de 2018, quinta-feira, no primeiro de dois tempos letivos. O conteúdo desta aula foi, essencialmente, a aplicação das propriedades do triângulo de pascal e o início do estudo do binómio de Newton.

### **Preparação da aula**

A professora mostrou principal cuidado na introdução da fórmula do Binómio de Newton, por forma a fazê-lo de forma gradual e intuitiva, com enfoque na procura de um raciocínio indutivo por parte dos alunos. Assim, os alunos poderiam ir constituindo e cimentando o seu raciocínio contribuindo-se para uma melhor compreensão da fórmula, ao invés do que aconteceria se esta fosse apresentada na sua versão geral já estruturada.

Além disso, a professora estagiária teve especial atenção na seleção de exercícios que não fossem demasiado difíceis, uma vez que são exercícios de introdução da matéria, pelo que não seria benéfico que os alunos iniciassem a resolução de exercícios relativos a um novo conteúdo e se sentissem imediatamente frustrados por não conseguirem resolver corretamente os primeiros exercícios. Ao mesmo tempo, foram escolhidos exercícios que pudessem ter alguns pontos para chamar à atenção, nomeadamente a determinação do coeficiente do termo independente ou do termo de um determinado grau. Além disso, pretendia-se, numa fase posterior, confrontar os alunos com alguns exemplos que não se limitassem à aplicação direta da fórmula do Binómio de Newton.

A aula previamente planeada foi, necessariamente, influenciada pela aula lecionada no dia anterior, a qual foi necessário ajustar ao trabalho que havia sido realizado com os alunos na introdução do triângulo de Pascal. Não tendo realizado quaisquer exercícios de aplicação do triângulo de Pascal na aula anterior, a professora estagiária contactou com as docentes orientadoras e considerou-se que seria vantajoso iniciar a aula com o jogo do triângulo de Pascal, que não tinha sido possível dinamizar.

### **Desenvolvimento da aula e considerações**

Como não havia sido possível terminar o jogo previsto no plano da aula anterior, e dada a sua importância por se tratar essencialmente de questões estrategicamente escolhidas por forma a contemplar as propriedades mais importantes sobre o triângulo de Pascal, a professora decidiu iniciar a aula pela resolução destes exercícios. Em vez da formação de grupos de três elementos, como tinha sido inicialmente pensado, a professora optou por formar grupos de dois alunos para não gerar demasiada confusão no início da aula, dado que seria necessário otimizar o tempo da aula.

Perante a dificuldade manifestada pelos alunos na aplicação das propriedades do triângulo de Pascal, a professora ajustou a sua planificação, por forma a disponibilizar mais algum tempo para a resolução destes exercícios. Além disso, a professora titular da turma sugeriu que a professora optasse por uma abordagem mais simples e mais visual, recorrendo a esquemas mais intuitivos para os alunos, por forma a aludir à construção e intuição a que a professora tinha apelado na aula anterior. Quando a professora seguiu a sugestão, os alunos começaram a compreender melhor os exercícios em questão, pelo que foi de extrema importância esta intervenção. De facto, a professora estagiária compreendeu imediatamente que estaria a utilizar uma abordagem demasiado formal e excessivamente simbólica, o que poderia estar a dificultar a compreensão dos conteúdos pelos alunos.

Depois de resolvidos alguns exercícios, a professora optou por questionar as professoras orientadoras se seria mais vantajoso deixar alguns exercícios para resolução posterior e avançar para o Binómio de Newton. Uma vez que o objetivo da aula também passava por dar início ao Binómio de Newton, as professoras consideraram que seria boa opção avançar.

Neste sentido, a professora deu início ao estudo do Binómio de Newton colocando no quadro a expressão  $(a + b)^2$ . Depois disso, questionou os alunos sobre o que os fazia lembrar e de que forma conseguiam desenvolver a expressão. Estes rapidamente perceberam que se tratava de um caso notável

e conseguiram obter o seu desenvolvimento. Em seguida a professora colocou a expressão  $(a + b)^3$  e também pediu aos alunos que obtivessem o seu desenvolvimento. Assim, num raciocínio indutivo, a professora acabou por pedir aos alunos que conjecturassem quanto à generalização da expressão em questão. Foi interessante verificar que a maioria dos alunos conseguiu deduzir esta expressão, mesmo aqueles que têm maiores dificuldades à disciplina. A professora já não teve tempo para realizar a demonstração da fórmula do Binómio de Newton, pelo que deixou como desafio para os alunos a demonstração do Binómio de Newton recorrendo ao Princípio de Indução Matemática. A par disto, a professora pretendia evidenciar a relevância desta demonstração para validar a generalização construída, ao mesmo tempo que lançava um desafio aos alunos mais curiosos e interessados.

Quando a aula terminou, as professoras orientadoras e a colega de estágio mencionaram alguns aspetos que podiam ser melhorados relativamente à aula em questão, nomeadamente:

- Explicitar o objetivo dos exercícios e um caminho possível para a sua resolução. Em alguns exercícios poderá não ter ficado claro qual era o objetivo do exercício nem aquilo que poderia ser feito para encontrar a sua solução. A professora deverá ter um maior cuidado na abordagem aos exercícios propostos, deixando clara e explícita a sua intenção ao selecioná-los para a resolução em aula.
- Utilizar mais a representação visual das linhas do triângulo de Pascal. Tal como já referido, a professora estagiária terá recorrido excessivamente ao formalismo das combinações e das suas propriedades, o que exigia dos alunos já algum domínio dos seus conhecimentos neste campo. De facto, esta abordagem terá sido demasiado prematura, uma vez que era a aula seguinte à introdução das propriedades das combinações. Assim, é necessário ter o cuidado de seguir, inicialmente, uma abordagem intuitiva e visual, reduzindo o nível de formalismo, de forma a não levar os alunos a considerarem esta uma matéria extremamente difícil e inacessível podendo criar-se alguma desmotivação face ao estudo e aplicação destes conteúdos.
- Melhorar a gestão do quadro branco. As professoras consideraram que um ponto a ter em atenção seria a organização e gestão do quadro, uma vez que deste aspeto depende em muito o acompanhamento da aula por parte dos alunos e a sua compreensão dos assuntos em questão, principalmente quando se tratam de conteúdos com bastante notação simbólica.
- Destacar a importância da demonstração na passagem do particular para o geral. As professoras consideraram de extrema importância a justificação da generalização dos conceitos, fórmulas ou outras. No caso, seria importante reforçar junto dos alunos a necessidade da demonstração da fórmula do Binómio de Newton, que foi deduzida a partir dos três primeiros casos expostos na aula. Além disto, uma das professoras referiu que teria sido interessante deduzir ainda a expressão  $(a + b)^4$ .

- Valorizar a participação dos alunos e incentivar a sugestão de ideias por parte dos alunos. Um fator a ter em atenção em qualquer aula é o pedido de auxílio e a participação dos alunos na aula, pois, deste modo, os alunos sentir-se-ão mais motivados para acompanhar a aula sentindo que as suas sugestões são válidas e úteis.

### **Autoavaliação**

De modo geral, esta aula representou uma enorme aprendizagem para a professora estagiária, por diversas razões, que serão destacadas a seguir. Novamente, é importante referir que a mudança do plano de aula deve ser encarada de forma positiva, pois o plano previamente pensado pode não estar totalmente adequado à resposta da turma ao tema. É importante ajustar os planos de aula elaborados e definir estratégias para cada turma e, dentro do possível, adequar às características de cada aluno.

Além disso, é essencial que o professor torne o aluno um agente ativo na aula. Quando os alunos sentem que fazem contribuições, mais ou menos relevantes, para o desenvolvimento da aula, tornam-se atores construtores do conhecimento, o que permite uma maior receptividade às aprendizagens. No entanto, também é importante que o professor saiba gerir a participação dos alunos em aula, isto é, não dar apenas voz aos alunos que participam muito, uma vez que os alunos mais reservados poderão não estar a acompanhar tão bem a matéria e, dessa forma, terão uma maior tendência para se desmotivarem, não permitindo, por parte do professor, a identificação das principais dificuldades dos alunos.

Esta aula permitiu, ainda, à professora estagiária compreender que uma abordagem mais intuitiva é extremamente importante no início da lecionação do triângulo de Pascal, o que certamente acontecerá com outras matérias da matemática escolar. Assim, a principal reflexão a retirar da experiência é tentar evitar uma abordagem demasiado simbólica e pouco visual quando a matéria e/ou os pré-requisitos, necessários ao desenvolvimento do tema, ainda não estão suficientemente consolidados pelos alunos.

Por último, assim como já terá sido alvo de reflexão, é essencial que o professor leve a cabo um raciocínio claro e um discurso rigoroso, pois, desse modo, os alunos, à partida, compreenderão melhor a matéria abordada e expressar-se-ão de forma mais rigorosa.

### **3.3.2.2.3. Quinta Aula**

A quinta aula lecionada pela professora estagiária à turma do 12º ano foi assistida pela professora orientadora e titular da turma, professora Rosário Lopes, pela professora Doutora Maria Helena Santos e pela colega de estágio, Linda Cardoso. A aula lecionada realizou-se a 21 de fevereiro de 2018, quarta-feira, e teve a duração de dois tempos letivos de 50 minutos cada. O conteúdo desta aula focou-se no domínio Probabilidades (PRB12), em particular no subdomínio Probabilidade Condicionada.

### **Preparação da aula**

Durante a preparação da aula a professora estagiária trocou vários pontos de vista com a professora Rosário Lopes, com o objetivo de delinear algumas estratégias de aula, uma vez que a aula previa a introdução de um conceito delicado e de extrema importância no campo das probabilidades. A professora Rosário chamou especialmente à atenção da importância da utilização de uma linguagem cuidada, clara e explícita.

Dada a relevância que a professora colocou neste aspeto, a professora estagiária considerou que seria interessante deixar a tónica da aula na linguagem associada aos problemas de probabilidade condicionada. Como forma de atingir este objetivo, foi realizada uma ficha de trabalho com alguns exemplos em linguagem corrente, cujos alunos teriam de concretizar em termos de probabilidades. A professora Rosário considerou imediatamente que esta seria uma estratégia muito interessante uma vez que a maior dificuldade dos alunos não está, normalmente, na aplicação do conceito de probabilidade condicionada, mas antes na interpretação dos enunciados, na identificação da probabilidade condicionada e, ainda, na distinção entre a probabilidade condicionada e a probabilidade da interseção de dois, ou mais, acontecimentos. Assim, a ficha a apresentar aos alunos consistia numa amalgama de situações com as quais os alunos comumente são confrontados nos exercícios.

A professora estagiária considerou ainda a realização com os alunos, no segundo tempo letivo, de uma tarefa que implicasse a realização de uma composição matemática, um tópico muito importante a trabalhar com os alunos e que, diversas vezes, é alvo de avaliação no Exame nacional de matemática A. A professora titular considerou muito pertinente a inclusão desta atividade no plano de aula, por também considerar um tópico extremamente relevante para o processo de aprendizagem dos alunos.

### **Desenvolvimento da aula e considerações**

A professora começou a aula introduzindo o conceito de probabilidade condicionada recorrendo a um exemplo. No entanto, a professora apercebeu-se que o ritmo da aula não estava a ir ao encontro da sua expectativa, uma vez que alguns alunos apresentaram dúvidas no conceito de probabilidade condicionada recorrendo à definição e à Lei de Laplace. A professora estagiária não estava à espera que tal acontecesse, provavelmente pela sua inexperiência. Como forma de desfazer a confusão manifestada principalmente por dois alunos, a professora Rosário sugeriu que a professora estagiária desse um exemplo mais simples, através da utilização de uma tabela e, a partir daí, calculasse a probabilidade condicionada pelas duas vias. Um dos alunos, que é normalmente muito calado em aula, mostrou que não estava a compreender que o denominador da definição de probabilidade condicionada de  $P(A|B)$  seria  $P(B)$  e não  $P(E)$ , sendo  $E$  o espaço amostral. Depois do exemplo dado, o aluno mostrou estar mais esclarecido e ter percebido a diferença entre as duas resoluções. Já a outra aluna, habitualmente muito participativa, que recorre frequentemente à mecanização dos conteúdos matemáticos em geral, mesmo depois do exemplo dado, durante a resolução de um outro exercício, continuou a cometer alguns

erros e a confundir as duas possibilidades para a resolução, pelo que foi necessário gastar mais algum tempo da aula com a explicação dos conceitos em causa.

Depois de introduzido o conceito, a professora distribuiu a ficha de trabalho previamente elaborada. Durante a sua resolução, os alunos, na sua maioria, compreenderam a tarefa proposta e os conceitos abordados. No entanto, frases como “20% dos alunos que estudam francês também estudam inglês e alemão”, “dos alunos que estudam alemão e francês, 80% também estudam inglês” ou “36% das raparigas estuda mais do que 5 horas por dia”, levaram à manifestação de algumas dúvidas por parte dos alunos, que confundiram, por exemplo, os conceitos de interseção de acontecimentos com acontecimentos condicionados, tal como já se previa.

Uma vez que foi necessário reforçar a explicação da probabilidade condicionada no início da aula, a professora teve de realizar alguns exercícios de aplicação antes de avançar para a ficha de trabalho, de forma a consolidar essa matéria. Como a professora não tinha previamente considerado necessária a realização desses exercícios, uma vez que não esperava que fosse um conceito que gerasse tantas dúvidas, foi necessário ajustar o plano de aula. Nesse sentido, foi deixada a atividade da composição matemática para a aula seguinte, pois não se esperava ser possível concretizar a atividade com o tempo que restava para o término da aula.

No final da aula, a professora estagiária reuniu com as professoras orientadoras e com a colega de estágio para analisar e discutir a aula lecionada. Tanto as professoras como a colega de estágio consideraram que, globalmente, a aula tinha corrido bem. No entanto, a professora Rosário Lopes, a professora Doutora Maria Helena Santos e a colega de estágio fizeram algumas considerações relativamente aos pontos a melhorar, nomeadamente:

- A explicação da probabilidade condicionada. Consideraram que a explicação da probabilidade condicionada nas suas duas “vertentes” poderia ter sido menos confusa se a professora estagiária tivesse considerado logo desde início um exemplo simples. Além disto, outra sugestão dada pelas professoras foi a necessidade de utilizar um exemplo em que não fosse possível aplicar a probabilidade condicionada com os cardinais dos conjuntos, isto é, através da Lei de Laplace, pois, desta forma, talvez os alunos não tivessem manifestado tantas dúvidas aquando da introdução do tópico.
- Explicações com recurso ao quadro branco deverão ser mais cuidadas. Foi apontada como melhoria a justificação da probabilidade de  $B$  no cálculo da probabilidade condicionada  $P(A|B)$ , ter de ser diferente de zero. Embora esta justificação tenha sido acompanhada por uma explicação no quadro branco, esta poderá ter sido um pouco confusa e levado a que alguns alunos tivessem tido algumas dúvidas, mesmo que não se tenham manifestado.
- Recurso a exemplo com acontecimentos que não fossem equiprováveis. A propósito da utilização da Lei de Laplace no cálculo da probabilidade condicionada, as professoras sugeriram que podia ter recorrido a um exemplo em que os acontecimentos elementares não fossem equiprováveis, uma vez que a professora estagiária fez referência a esse aspeto como

sendo de grande importância. Teria sido valorizado este exemplo, pois permitiria aos alunos perceberem a importância desta condição que se impõe para aplicar a Lei de Laplace.

- Chamada de atenção para as frações serem apresentadas na forma irredutível. Ainda como aspeto a melhorar, as professoras consideram que teria sido importante realçar, quando um dos alunos escreveu uma fração que não se apresentava na forma de fração irredutível, que a professora tivesse chamado à atenção, uma vez que no nível de ensino em questão, já não é aceitável que os alunos não tenham este cuidado.

De modo geral, as professoras consideraram que a aula foi positiva para a aprendizagem dos alunos, uma vez que incidiu sobre uma questão de extrema importância para a aprendizagem das probabilidades e, além disso, os alunos mostraram-se muito empenhados na aprendizagem da matéria, o que foi muito positivo para o desenvolvimento da aula. Apesar disso, destacaram que foi uma aula menos fácil de gerir pelo facto de a linguagem no âmbito das probabilidades ser uma questão muito delicada, o que se agrava quando não se tem uma experiência sólida como é o caso da professora estagiária. Dado que não foi possível concretizar todo o plano, as professoras consideraram que seria positivo abordar a composição matemática numa aula seguinte.

### **Autoavaliação**

A professora estagiária ficou muito satisfeita com esta aula, uma vez que permitiu que esta se apercebesse das dificuldades que o conceito tratado poderá trazer em sala de aula. Embora os alunos tenham apresentado algumas dúvidas, principalmente no início da aula com a introdução do novo conceito, foi uma mais valia ter acontecido com a presença das professoras orientadoras, que puderam auxiliar e referir alguns aspetos de melhoria para que a professora estagiária pudesse corrigir, refletir e melhorar em aulas posteriores. É de realçar que este processo não poderia ter acontecido se os alunos não se tivessem sentido à vontade para expor as suas questões, o que demonstra também que foi criado um ambiente propício para a aprendizagem, que é extremamente importante tanto para os alunos, que puderam ver resolvidas as suas dúvidas, como para a professora, que conseguiu perceber em que aspetos a sua abordagem não estava a ser tão explícita quanto gostaria.

Tal como se esperava, esta aula foi muito desafiadora, no sentido em que apresentou a introdução de um conceito delicado e tinha o objetivo de trabalhar com os alunos as questões de linguagem que normalmente aparecem associadas aos problemas de probabilidades e que costumam representar um ponto de muita dificuldade, principalmente quando a matéria ainda está pouco explorada, como foi o caso da aula em questão.

Por último, mas não menos importante, a professora estagiária foi confrontada com algumas questões que não tinha considerado tomarem tanto tempo da aula, pelo que foi necessário alterar o plano previamente traçado. Evidentemente é uma questão que irá sempre ocorrer, uma vez que o plano de aula deve constituir um guia e não uma imposição no regulamento da aula para o professor. A professora estagiária compreendeu perfeitamente, com o desenvolvimento desta aula, que o ajuste do plano de aula,



por si só, não traz prejuízo para a aprendizagem dos alunos. Aliás, esta é uma ação imprescindível quando a aprendizagem dos alunos não vai ao encontro dos objetivos definidos para a aula.

#### 3.3.2.2.4. Sexta Aula

A sexta aula lecionada pela professora estagiária à turma do 12.º ano foi assistida pela professora orientadora e titular da turma, professora Rosário Lopes e pela professora Doutora Maria Helena. A aula lecionada realizou-se a 8 de março de 2018, quinta-feira, e teve a duração de um tempo letivo de 50 minutos. O conteúdo desta aula focou-se no domínio Probabilidades (PRB12), em particular no subdomínio Probabilidade Condicionada.

##### **Preparação da aula**

A aula lecionada surgiu da dificuldade que houve em concluir a aula anteriormente planificada. Pela relevância e pertinência do desenvolvimento de uma aula que contemplasse a elaboração de uma composição matemática, dado ser um tópico muitas vezes difícil para os alunos, a professora estagiária lecionou esta aula como forma de dar continuidade ao objetivo previamente proposto.

Assim, a preparação da aula baseou-se naquilo que já estava previamente preparado para a concretização da quinta aula. Esta preparação envolveu a realização de uma ficha de trabalho, na qual a professora estagiária considerou a adaptação de um exercício do Exame nacional de matemática A, que abordasse uma composição matemática com enfoque na probabilidade condicionada. Dado que a professora não encontrou nenhum exercício nos exames nacionais até agora realizados, que fosse suficientemente simples a nível de conteúdos, acabou por adaptar um dos exercícios que encontrou, pedindo que respondessem a três questões, em que uma delas envolvia a probabilidade condicionada.

Paralelamente à realização da ficha, a professora considerou que seria interessante que os alunos tomassem consciência dos critérios de exame ao nível das composições matemáticas, pelo que se preocupou em confrontar os alunos com os tópicos exigidos aquando da resolução de uma demonstração matemática. Como forma de tornar mais relevante a nível das aprendizagens, a professora estagiária pensou que fossem os próprios alunos a fazer as correções, não as suas, mas sim as dos seus colegas. Esta ideia iria potenciar a capacidade crítica e de heteroavaliação dos alunos.

##### **Desenvolvimento da aula e considerações**

A professora estagiária começou por distribuir a ficha que tinha previamente elaborado. A ficha continha três exercícios relacionados com probabilidades, sendo que o último envolvia a elaboração de uma composição matemática. A professora estagiária acabou por acrescentar os dois primeiros exercícios por considerar que eram interessantes uma vez que relacionavam o cálculo de probabilidades a uma abordagem geométrica. Além disto, considerou que apenas o exercício da composição matemática pudesse ser pouco para desenvolver na aula inteira. A professora estagiária deu algum tempo para que

os alunos resolvessem os dois primeiros exercícios, deixando-lhes algum tempo para os tentarem realizar por eles próprios. Enquanto isso, a professora circulou pela sala de modo a verificar se existiam dúvidas. Como a professora percebeu que os exercícios estavam a gerar algumas dúvidas, acabou por resolvê-los ainda antes de alguns alunos os terem terminado. Esta mudança de estratégia prendeu-se com o facto de a professora considerar que os alunos já estavam a desviar-se um pouco dos objetivos da aula e, caso não tivesse feito esta alteração, provavelmente não teria conseguido iniciar a realização da composição matemática.

Quando iniciou a resolução do último exercício, a professora fez uma breve explicação do que era pretendido e pediu aos alunos que prosseguissem com a sua realização. Depois de concluído o exercício, a professora projetou os critérios de avaliação, com os quais acompanhou a respetiva explicação. Posteriormente, a professora pretendia que os alunos trocassem as resoluções com o colega de mesa e que, fazendo recurso dos critérios projetados, fizessem a respetiva correção. No entanto, tal não foi possível devido ao pouco tempo que faltava para a aula terminar. Assim, a professora considerou que seria melhor se os alunos corrigissem as suas próprias questões. Desta forma, os alunos tiveram consciência dos critérios que eram utilizados em perguntas de Exames Nacionais e/ou testes de avaliação, ao mesmo tempo que compreendiam o rigor necessário para corrigir uma questão e da dificuldade de classificar questões de avaliação.

Dado o tempo todo gasto no início da aula com as duas primeiras questões, o final já não permitiu um aprofundamento como desejado relativamente ao objetivo principal da aula, a elaboração de uma composição matemática no âmbito da probabilidade condicionada.

Tal como é habitual, as professoras reuniram no final da aula com a professora estagiária, de modo a refletirem sobre alguns aspetos a melhorar no desenvolvimento da aula, nomeadamente:

- Focar no objetivo principal da aula. Deverá ter-se em atenção o principal objetivo da aula e evitar a realização de exercícios que, embora possam ser interessantes, fujam do principal foco da aula. Neste caso, a professora deveria ter optado por começar pela composição matemática e deixar os dois exercícios, que considerou mais relevantes para a aprendizagem dos alunos para serem resolvidos posteriormente.
- Preferir uma abordagem de heteroavaliação. Apesar de as professoras terem compreendido o motivo que levou a professora a modificar o seu plano, consideraram que teria sido uma abordagem muito mais interessante se os alunos tivessem corrigido e avaliado as respostas de outros colegas. Além disso, o facto de ter restado pouco tempo para a composição matemática também levou a que o objetivo específico da aula não fosse atingido plenamente, uma vez que teria sido importante dedicar mais tempo à reflexão das respostas e dos critérios de avaliação.

### **Autoavaliação**

Durante a aula a professora estagiária percebeu que os alunos estavam a perder algum tempo com as duas primeiras questões da ficha, que não envolviam a elaboração de uma composição matemática. No que diz respeito objetivo específico que se queria ver atingido, elaborar uma composição matemática e avaliar as respetivas composições com os critérios de exames, a aula não foi tão bem concretizada. Tal como já mencionado, a professora estagiária considerou que a realização de apenas um exercício, aquele que envolvia a composição matemática, poderia não ser suficiente, pelo que acabou por acrescentar dois exercícios menos complexos, que envolviam cálculos simples de probabilidades. No entanto, a dificuldade de interpretação da abordagem geométrica acabou por ser um entrave para alguns alunos, pelo que, em situações futuras, a professora deverá optar por começar a aula pela realização dos exercícios que vão ao encontro dos seus objetivos específicos e, apenas depois, deverá realizar os restantes exercícios.

Assim, embora a aula não tenha ido ao encontro do que a professora estagiária tinha previamente previsto, foi bastante enriquecedora a nível de aprendizagem enquanto docente. A professora compreendeu que na aula deverá ser dada prioridade aos exercícios que vão ao encontro dos objetivos da aula, por forma a que não seja gasto demasiado tempo nas restantes atividades. Embora a professora estagiária considere que os exercícios realizados foram importantes, pois permitiram aos alunos a abordagem a um problema de geometria relacionado ao cálculo de probabilidades, não deixaram dar tanta atenção à elaboração de uma composição matemática e o confronto com os critérios de correção.

### **3.3.3. Terceiro Período**

No 3.º período, deu-se continuidade ao conteúdo Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI12), abordando, em particular, o subdomínio Osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton. A abordagem deste tópico contou com a presença de uma professora de Física e Química, que introduziu o conteúdo à luz dos conhecimentos de Física, o que se revelou uma estratégia muito positiva, pois evidenciou não só a relevância da matemática nas outras ciências como também a interdisciplinaridade entre estas duas disciplinas. O final do período foi dedicado ao tópico Números Complexos (NC12), sendo que ainda restou algum tempo para a revisão de alguns conteúdos como preparação para exame, nomeadamente Geometria, Probabilidades, Funções e outros que os alunos consideraram importantes.

#### **3.3.3.1. Avaliação**

Neste período houve, essencialmente, três instrumentos de avaliação, que corresponderam a uma ficha de avaliação, com a duração de sessenta minutos, um teste de avaliação global, com estrutura semelhante à do ensino nacional, comum a todas as turmas de 12.º ano, com a duração de uma hora e meia, a que se somou meia hora de tolerância, e um trabalho desenvolvido em grupo, com três e quatro elementos, que consistia em desenvolver uma atividade a dinamizar com alunos de 5.º e 6.º ano do

Agrupamento. Relativamente a este trabalho, idealizado pela área disciplinar de matemática a propósito do plano de ação de melhoria, que pretendia que houvesse maior articulação vertical entre as escolas do Agrupamento, os alunos que apresentassem um melhor trabalho iriam apresentá-lo aos alunos de 2.º ciclo do Agrupamento, ou no dia do patrono ou num horário a combinar oportunamente. À avaliação deste tópico permitia somar 0,4 na avaliação final dos alunos. A Tabela 10 sistematiza os momentos de avaliação da turma ao longo do 3.º período.

Tabela 10: Instrumentos de avaliação aplicados no 3.º período.

<b>Data</b>	<b>Instrumento de Avaliação</b>	<b>Domínio Avaliado</b>
<b>23/05/2018</b>	Ficha de Avaliação	Números Complexos
<b>28/05/2018</b>	Teste de Avaliação	Teste global com toda a matéria de 12.º ano
<b>Até 02/06/2018</b>	Trabalho de Grupo	Atividade a dinamizar no 2.º ciclo

### 3.3.3.2. Aulas lecionadas

Durante o terceiro período, a professora estagiária lecionou dois blocos de cinquenta minutos assistidos pela professora orientadora Rosário Lopes, professora titular da turma, pela professora Doutora Maria Helena Santos e pela colega de estágio, Linda Cardoso. Nos pontos seguintes são feitas as reflexões sobre cada uma das aulas.

#### 3.3.3.2.1. Sétima Aula

A sexta aula lecionada pela professora estagiária à turma do 12.º ano foi assistida pela professora orientadora e titular da turma, professora Rosário Lopes, pela professora Doutora Maria Helena Santos e pela colega de estágio, Linda Cardoso. A aula lecionada realizou-se a 18 de abril de 2018, quarta-feira, e teve a duração de dois tempos letivos de 50 minutos cada. O conteúdo desta aula focou-se no domínio Números Complexos (NC12), em particular no subdomínio Introdução aos números complexos.

#### **Preparação da aula**

Durante a preparação da aula, a professora estagiária manteve um contacto frequente com a professora titular da turma, por forma a delinear algumas estratégias que pudessem tornar a aula o mais clara e explícita possível. É de notar que a introdução ao tema em questão se apresenta bastante diferente com as metas curriculares, nomeadamente pela consideração de pares ordenados na definição de números complexos, em comparação com a abordagem do programa anteriormente em vigor. O facto de se apresentar os números complexos como o conjunto  $\mathbb{R}^2$  munido de duas operações de adição e multiplicação e de não se dar continuidade a esta definição nos conceitos definidos posteriormente,

trouxe algumas preocupações que tiveram de ser contornadas, por forma a não parecer uma abordagem demasiado distante e forçada para os alunos.

A professora estagiária consultou diversos manuais e livros técnicos. Como a maioria dos manuais apresentava a introdução aos números complexos de forma pouco rigorosa e, muitas vezes, com um encadeamento pouco lógico, a professora consultou ainda diversas fontes na Internet. Efetivamente houve uma grande preocupação em aprofundar o conhecimento do tema em questão, porque apenas dessa forma seria possível proporcionar aos alunos uma aula apelativa e que não lhes parecesse estranha.

Aliada à questão anterior, a professora estagiária realizou pesquisas históricas, por forma a envolver os alunos na origem dos números complexos. Embora esta seja uma prática comum para a professora estagiária, desta vez a pesquisa histórica foi sobrevalorizada. Procurou-se o aprofundamento do tema e, ainda, a procura de algumas curiosidades que motivassem os alunos para o seu estudo.

Uma vez que era a primeira aula em que os alunos iriam ter contacto com o tema, a professora estagiária considerou que seria importantíssimo mostrar aos alunos a relevância do aparecimento dos números complexos, explicando-lhes, para tal, a sua utilidade. Neste sentido, a docente também pesquisou algumas aplicações dos números complexos no dia a dia. Embora a professora estagiária tivesse tido a intenção de realizar um exemplo concreto envolvendo números complexos, todos os que encontrou durante a sua planificação exigiam conteúdos demasiado avançados. Assim, a professora optou simplesmente por dar alguns exemplos de aplicação dos números complexos, sem qualquer aprofundamento a nível matemático.

Dado o enfoque que a professora estagiária queria dar à introdução histórica dos números complexos, e dadas as restrições de tempo que uma aula impõe, também houve o cuidado de preparar uma apresentação em computador para projetar. Esta estratégia não só permitiria balizar o tempo e as histórias partilhadas com os alunos, como também mostrar aos alunos algumas figuras marcantes da história dos números complexos, por forma a estes acompanharem melhor o desenvolvimento da aula.

### **Desenvolvimento da aula e considerações**

A professora iniciou a aula mostrando aos alunos a função  $f$  cuja expressão era dada por  $x^2 + 1$  e pediu que estes calculassem os seus zeros. Foi interessante verificar que, inevitavelmente, alguns alunos já estavam à espera do que a docente queria ouvir. Provavelmente por já terem visto a matéria fora da sala de aula, em explicações, por exemplo, avançaram com uma resposta, do género, “não tem soluções em  $\mathbb{R}$ , professora, mas tem em  $\mathbb{C}$ ”. Claro que a professora aproveitou a resposta dos alunos referindo que era verdade o que diziam e que a aula desse dia iria alterar a forma como estes viam o Mundo à sua volta. Como forma de captar a atenção dos alunos, a professora referiu que os alunos iriam perceber que não conhecem um “Mundo Real”, mas sim um “Mundo Complexo”. Ao dizer isto, a professora mostrou o gráfico da função  $f$ , no qual os alunos conseguiam observar uma “terceira

dimensão” que estava escondida para eles até então. Nessa altura, a professora sentiu que tinha conseguido envolver os alunos e captar a sua atenção.

Em seguida, a professora enunciou o teorema fundamental da Álgebra, não só por considerar muito relevante que os alunos ouvissem falar dele, pelo menos, antes do ensino superior, como também para suscitar a curiosidade daqueles que não considerariam que o polinómio  $x^2 + 1$  tinha de ter exatamente duas raízes. Na verdade esses alunos estavam apenas a considerar o conjunto dos números reais e a desprezar o conjunto  $\mathbb{C}$ , o que é normal acontecer, uma vez que ainda não tinham conhecimento dele.

Por forma a todo o conceito de número complexo fazer sentido, a professora contou aos alunos algumas histórias relativas ao aparecimento dos números complexos. De olhares compenetrados e atentos às histórias que a professora contava, os alunos tomaram conhecimento de algumas peripécias e intrigas que se desenrolaram ao longo da história da matemática, o que permite uma certa humanização daquela ciência que parece tão longe da maioria destes alunos.

Como forma de motivar o aparecimento de  $i$  e as suas potências, a professora associou a multiplicação por  $i$  a uma rotação de  $90^\circ$ . Esta estratégia de introdução revelou-se muito positiva, uma vez que é muito intuitiva e visual, o que levou os alunos a manifestarem a sua compreensão do que estava a ser tratado.

Posteriormente a professora ainda provou algumas das propriedades a que as operações em  $\mathbb{C}$  deveriam satisfazer, com a colaboração dos alunos, a quem ia pedindo sugestões e ideias. Além disso, ainda foi possível provar que  $i^2 = -1$  e que, dado um número complexo  $z$ , existe um número real  $a$  e um número real  $b$  tais que:  $z = a + bi$  e, além disso,  $a$  e  $b$  são únicos. A manipulação algébrica das operações e a demonstração das propriedades permitiu à professora trabalhar um pouco com o conjunto dos números complexos e compreender as dúvidas que os alunos pudessem ter com a sua aplicação.

Ainda foi possível comparar as operações com complexos na forma algébrica e pela sua definição. Assim, pretendia-se que os alunos compreendessem que a forma mais habitual com que iriam trabalhar as operações de complexos não seria recorrendo à definição, mas sim estendendo as regras operatórias que já conhecem dos números reais e tendo em conta que  $i^2 = -1$ .

Já no final da aula, a professora ainda interpretou a multiplicação e a adição de números complexos no plano de *Argand*, no qual os alunos não apresentaram uma grande dificuldade. Ainda foi possível, poucos minutos antes da aula terminar, dar a definição de conjugado de um número complexo e pedir aos alunos que respondessem a alguns exercícios apresentados como exemplos pela docente. Novamente, os alunos revelaram ter compreendido o conceito, dado que o conseguiram aplicar sem qualquer dificuldade.

Relativamente à análise realizada com as professoras orientadoras e com a colega de estágio, esta não decorreu apenas no final, mas também no intervalo entre as duas aulas. Entre os dois tempos de aula, as professoras referiram apenas que a aula estava a correr extremamente bem e que os alunos estavam a ir ao encontro das expectativas, pelo que deveria continuar com o desempenho que tinha

demonstrado até então. A professora titular apenas referiu que poderia dar mais ênfase ao facto de a definição da soma e do produto de complexos ter surgido naturalmente a partir da resolução de uma equação cúbica, mas que o programa e o tempo disponível não justificavam abordar. Embora a professora estagiária tenha feito esta referência, a professora considerou que poderia ser dado mais enfoque. Já no final da aula, as professoras orientadoras continuaram com a opinião de que a aula tinha sido muito positiva, deixando apenas alguns apontamentos relativamente à mesma, nomeadamente:

- Evitar utilizar as mesmas variáveis quando se quer dar um outro exemplo. Embora a professora esteja consciente da importância de não utilizar letras iguais para dar exemplos diferentes, as professoras disseram que, num determinado exemplo, em vez de escrever  $x + y$  poderia, por exemplo, ter optado por  $a + b$ , uma vez que as variáveis  $x$  e  $y$  já estavam a ser utilizadas na demonstração. A professora fez apenas um pequeno apontamento, quando uma aluna apresentou dúvidas na multiplicação de complexos pela definição, ao mostrar o caso particular do conjunto dos números reais. Embora não tenha surgido nenhuma dúvida, deverá ter-se sempre em atenção estes pequenos detalhes.
- Abordar o caso em que a parte imaginária e real são ambas nulas. Quando a professora distinguiu os diferentes “tipos” de números complexos, deveria ter realçado que um imaginário puro terá de ter a parte real nula e, ainda, a parte imaginária diferente de zero. As professoras referiram que a última parte não tinha sido chamada à atenção pela professora, o que seria indispensável. A par disto, as professoras sugeriram abordar o caso em que ambas as partes eram nulas, questionando os alunos de que “tipo” de número estaria agora a ser considerado.

### **Autoavaliação**

Ao encontro do que as professoras orientadoras referiram, a professora estagiária concorda que a aula foi extremamente produtiva e interessante para os alunos, dando-lhes uma ideia intuitiva e muito “verdadeira” da noção de número complexo. A professora avalia positivamente todo o trabalho de preparação que desenvolveu, pois, se não tivesse explorado diferentes metodologias, consultado diversas fontes de informação e discutido com a professora orientadora tantas vezes, provavelmente não teria conseguido articular os conceitos de forma tão célere e clara como conseguiu fazer.

Embora consciente de uma abordagem atípica e arriscada, a docente ficou muito agradada com a satisfação e a aprendizagem que os alunos manifestaram. Além disso, a professora estagiária sentiu-se extremamente enriquecida com as diferentes opiniões que as professoras orientadoras expressaram, sendo, como habitualmente, alvo de análise e reflexão para a melhoria do desenvolvimento da atividade docente no futuro.

### 3.3.3.2.2. Oitava Aula

A sétima aula lecionada pela professora estagiária à turma do 12.º ano foi assistida pela professora orientadora e titular da turma, professora Rosário Lopes, pela professora Doutora Maria Helena Santos e pela colega de estágio, Linda Cardoso. A aula lecionada realizou-se a 3 de maio de 2018, quinta-feira, e teve a duração de um tempo letivo de 50 minutos. O conteúdo desta aula inseriu-se no domínio Números Complexos (NC12), no subdomínio Exponencial complexa e forma trigonométrica dos números complexos.

#### **Preparação da aula**

À semelhança das restantes aulas preparadas durante o ano letivo, a professora manteve-se em constante contacto com a professora Rosário Lopes por forma a discutir e analisar a aula tratada. O facto de ser uma matéria que foi introduzida nas metas curriculares no presente momento em vigor e, portanto, não estava contemplada no antigo programa, tornou muito importante a troca de ideias entre as professoras. Este tema apresenta abordagens diferentes nos vários manuais consultados e, na realidade, nem todos o retratam da maneira mais correta e coerente cientificamente, pelo que foi necessário ter um espírito crítico forte e seleccionar, em cada um, apenas as informações fidedignas. Por último, trata-se de um tópico que exige uma linguagem muito cuidada, o que requer muita atenção e cuidado por parte da docente. Tal como já referido, a linguagem é um dos elementos mais importantes para um professor, uma vez que é com esta que se estabelece o contacto com os alunos e é através de uma comunicação rigorosa e correta que os alunos aprendem mais e melhor.

Relativamente aos exercícios de aplicação que a professora contemplou no seu plano, foram ao encontro da importância que a professora titular dá à passagem dos números representado na forma algébrica para a forma trigonométrica, em particular, no caso de números reais e imaginários puros.

#### **Desenvolvimento da aula e considerações**

A professora estagiária iniciou a aula referindo que iria ser aprendida uma forma eventualmente mais simples de escrever e “trabalhar” os números complexos, isto é, começou por dar uma motivação ao estudo do tema. Para tal, foi importante rever o conceito de módulo de um número complexo. Os alunos, quando questionados pela professora, foram capazes de responder corretamente relativamente à definição do conceito, o que revela que ainda o tinham presente.

Como forma de continuar a envolver os alunos na aula, a professora desafiou-os relativamente a qual seria a definição de número complexo unitário. Embora alguns alunos não tenham conseguido dizer de imediato do que se tratava, quando a docente disse que o conceito do início da aula era relevante para dar resposta a essa questão, os alunos manifestaram a compreensão do conceito.

A professora demonstrou então que um complexo  $z$  é unitário se, e só se, existir um número real  $\alpha$  tal que  $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ . Como os alunos não demonstraram grande confusão na demonstração



da propriedade, a professora seguidamente deu um exemplo de aplicação da propriedade, onde apresentou o número complexo  $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  na forma algébrica e pediu que escrevessem na forma trigonométrica. Com isso, a professora acabou por discutir o facto de um número complexo ter infinitos argumentos da forma  $\frac{\pi}{3} + 2k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) sendo que depois generalizou o facto para qualquer número complexo e referiu que os argumentos de um complexo são da forma  $\theta + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) justificando através da periodicidade das funções seno e cosseno.

Em seguida, a professora apresentou aos alunos a fórmula de Euler e a expressão da exponencial complexa. Como forma de motivação, perguntou aos alunos se achariam que tinha sido Euler a descobrir a fórmula pela primeira vez. Vários alunos fizeram alusão à aula de introdução aos complexos, para referir que provavelmente não teria sido este o autor da fórmula, pois já sabiam que inúmeras fórmulas e teoremas receberam nomes de matemáticos embora não tenham sido descobertas e/ou demonstradas por eles pela primeira vez.

Após a apresentação da fórmula de Euler, a professora projetou excertos do vídeo “A fórmula mais bela”, do programa “Isto é Matemática”. Dado que, posteriormente, a professora iria acompanhar os alunos a uma visita de estudo à FCT-UNL, onde os alunos iriam ter uma aula prática com o docente que apresenta o programa, foi um momento oportuno para o dar a conhecer aos alunos. Estes mostraram-se interessados e envolvidos na visualização do vídeo, que tinha como principal objetivo despertar o interesse de alguns alunos que pudessem estar menos motivados.

Aproveitando o facto de os alunos estarem mais atentos e concentrados, a professora pretendia deduzir as expressões do produto e do quociente de complexos na forma trigonométrica. Para isso, deu cerca de 2 ou 3 minutos para que os alunos tentassem fazer por si e, em seguida, uma aluna voluntariou-se para ir ao quadro fazer a demonstração. A professora pediu que os alunos verificassem se também tinham conseguido realizar ou se teriam alguma dúvida a esclarecer.

A professora chamou à atenção dos alunos para o facto de ter referido que a aula iria, eventualmente, permitir a simplificação das operações com complexos. No entanto, todas as propriedades apenas se verificaram para os números complexos unitários, pelo que seria necessário estender a quaisquer números complexos. A professora demonstrou que, dado um número complexo  $z \neq 0$ , existe um único número positivo  $r$  e um único número complexo unitário  $w$  tais que  $z = rw$ , com  $r = |z|$ . Embora os alunos não se tenham manifestado, a professora percebeu que esta demonstração já não foi tão bem compreendida por alguns alunos, pelo que reforçou a sua explicação. Como a aula estava prestes a terminar, a docente apenas apresentou um exercício de aplicação, embora não tenha sido possível explorá-lo com a profundidade necessária, o que foi feito na aula seguinte.

No final da aula, a professora reuniu, como habitual, com as professoras orientadoras que partilharam as suas considerações relativamente à aula assistida. Embora tenham considerado uma boa aula, apontaram alguns aspetos essencialmente ligado à linguagem, frisando que seria expectável uma vez que eram conceitos muito delicados e que, aliados a uma pouca experiência no ensino, poderiam

trazer algumas dificuldades na sala de aula. Foram apontadas, nomeadamente, algumas sugestões de melhoria:

- Gerir o quadro branco de forma mais organizada. As docentes referiram que o quadro deveria ter sido melhor organizado, principalmente na última demonstração realizada. No caso de alguns alunos, distraidamente, copiarem *ipsis verbis* o que estava no quadro, não compreenderiam o encadeamento dos raciocínios, que foram acompanhados por algumas justificações feitas oralmente pela professora estagiária.
- Ter cuidado com as condições escritas. No que diz respeito à primeira demonstração feita, a professora concluiu, não intencionalmente, que uma equivalência era verdadeira apenas com uma das implicações demonstradas. Embora a docente quisesse apenas escrever a implicação e, no final, introduzir a implicação em sentido contrário, devido a uma distração, acabou por escrever antes de demonstrar a segunda implicação. Este lapso não causou qualquer confusão ao desenvolvimento da aula, mas deve ser corrigido, uma vez que o rigor e a clareza são as características por excelência da profissão docente.
- Referir que o complexo não unitário considerado no plano de Argand é não nulo. A professora, por descuido, não referiu que o complexo  $z$  representado no plano complexo teria de ser, necessariamente, não nulo. A professora tomou um número complexo qualquer e representou-o no plano, mas, como nada foi dito sobre este complexo ser não nulo, não faria sentido depois considerar a divisão pelo módulo de  $z$ .
- Realçar a utilização dos complexos unitários. A professora deveria ter reforçado a razão pela qual estava a fazer uso apenas dos complexos unitários, para que ficasse claro para os alunos o motivo de considerar os números complexos unitários e não quaisquer complexos.
- Enfatizar a existência de infinitos complexos dados por  $e^{i\theta}$ . Embora a professora tenha referido diversas vezes que os argumentos do complexo são em número infinito, a professora não fez essa referência quando mostrou a representação na forma  $e^{i\theta}$  para um complexo unitário  $\cos\theta + i\sin\theta$ . Além disso, apesar de estar contemplado no plano de aula referir que dois argumentos de um mesmo complexo diferem por  $2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ , a professora acabou por referir apenas que os argumentos de um complexo são da forma  $\theta + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ . A primeira frase, embora tenha o mesmo significado que a segunda, poderia ser mais intuitiva para a compreensão dos alunos, pelo que deveria ter servido de complemento durante a explicação.

### Autoavaliação

Globalmente a aula lecionada foi muito importante para a aprendizagem da professora estagiária. Das diversas aprendizagens trazidas, a professora destacaria três, sem considerar qualquer ordem de relevância. A primeira é a organização e a escrita do quadro, que deve ser o mais cuidada possível, pois o quadro é, sem dúvida, um ponto de comunicação e é através dele que os alunos, muitas

vezes, retêm as principais ideias da aula. A segunda prende-se com uma preparação profunda e detalhada da aula, principalmente quando os temas são delicados e exigem encontrar estratégias a nível científico-pedagógico para expor a matéria da forma mais intuitiva e encadeada possível. A última diz respeito ao rigor, a nível da comunicação escrita e oral, pois, tal como já referido, o professor deve não só ser o exemplo para os seus alunos, como também proporcionar a estes um raciocínio coerente e claro, uma vez que estas características irão permitir uma melhor fluência da aula.

### 3.3.4. Avaliação e Classificação

Durante o primeiro período, além da lecionação de aulas, a professora estagiária também participou na correção e classificação dos testes de avaliação realizados pelos alunos. Para tal, foram fotocopiados os testes de avaliação de um grupo de 8 alunos, que foram simultaneamente classificados pela professora orientadora e pela professora estagiária.

No caso do primeiro teste, a professora orientadora elaborou os critérios de classificação do teste depois de os discutir e justificar junto da professora estagiária, que os iria utilizar para fazer a correção. Já no segundo teste, a professora estagiária teve de elaborar os critérios de correção do teste e, posteriormente, passar à respetiva correção e classificação. Em ambas as situações a professora estagiária reuniu com a professora orientadora para discutir as diferentes pontuações atribuídas em cada um dos itens dos testes de avaliação corrigidos.

Relativamente ao desempenho da professora estagiária nestas tarefas, é de realçar que na maioria das situações as professoras tinham opiniões convergentes do que diz respeito aos elementos a valorizar numa resposta, ou seja, as diferenças no peso atribuído pela professora orientadora era de poucas décimas relativamente ao considerado pela professora orientadora. Apesar disso, foi muito interessante confrontar algumas situações em que a professora estagiária valorizava mais alguns aspetos comparativamente com a perceção da professora orientadora e vice-versa. No entanto, globalmente, a avaliação dos alunos acabava por ser muito próxima.

Em suma, este contacto orientado com a correção de provas de avaliação, proporcionou à professora estagiária uma enorme aprendizagem, uma vez que permitiu a troca de ideias e pontos de vista com a larga experiência de correção de provas da professora orientadora, o que se traduziu numa aprendizagem relativamente ao processo de classificação de tarefas e avaliação dos alunos. Nestas discussões, foi possível discutir diferentes aspetos, nomeadamente a cotação de cada uma das etapas da resolução de cada item, o peso a atribuir a cada etapa da resolução de um determinado item, a cotação relativa a cada pergunta do teste, a consideração de respostas que não estavam previamente contempladas nos critérios de correção, ou até mesmo que o professor não tinha considerado, entre outros aspetos de extrema importância.

### 3.4. A turma do 7.º ano

A turma do 7.º ano teve ao longo do ano letivo 26 alunos, sendo que no 3.º período ingressou na turma mais uma aluna. As idades dos alunos estavam compreendidas entre os 12 e os 16 anos. A turma apresentava alguns casos de indisciplina e vários alunos com mais de três negativas ao longo dos períodos. Além disso, a opinião da professora de matemática ao longo do ano letivo era de que a turma apresentava muito desinteresse pela disciplina e falta de atenção durante as aulas, o que se refletia num fraco desempenho e resultado a nível da turma. Dadas as características apresentadas, a professora estagiária procurou sempre, nas aulas lecionadas, utilizar estratégias que pudessem promover o interesse dos alunos pela disciplina, através da dinamização de tarefas interativas e originais. Além das aulas lecionadas, a professora estagiária acompanhou a turma, pelo menos, uma vez por semana, habitualmente às quartas-feiras. Também acompanhou a direção de turma desta turma, que será detalhada no ponto 3.4.2. Direção de Turma.

#### 3.4.1. Aulas lecionadas

Na turma do 7.º ano foram lecionadas quatro aulas na disciplina de matemática. A primeira aula foi assistida apenas pela professora titular da turma, a professora Ana Peres, e realizou-se na semana anterior à aula primeira aula assistida, dia 18 de outubro de 2017. As aulas seguintes foram também assistidas pela professora titular, pela professora orientadora, professora Rosário Lopes, pela professora Doutora Maria Helena Santos e pela colega de estágio.

##### 3.4.1.1. Primeira aula

A primeira aula assistida lecionada pela professora estagiária foi assistida pelas professoras Ana Peres, Rosário Lopes e Maria Helena Santos e pela colega de estágio, Linda Cardoso. A aula lecionada realizou-se a 26 de outubro de 2017, quinta-feira, no segundo de dois tempos letivos dos alunos. Os conteúdos desta aula inseriram-se no subdomínio Figuras Geométricas, pertencentes ao domínio Geometria e Medida (GM7). Com esta aula deu-se início ao estudo da geometria, na qual foram abordados alguns conceitos relacionados com linhas poligonais e polígonos.

Numa aula anterior à aula considerada, dia 18 de outubro de 2017, a professora estagiária lecionou a sua primeira aula à turma do 7.º ano. Esta foi lecionada no segundo tempo letivo da turma e assistida apenas pela professora Ana Peres, professora titular da turma. Nesta aula a professora estagiária abordou o conceito de potência de uma potência, para a qual procurou sempre a participação dos alunos. Depois de introduzir o conceito, a professora realizou alguns exercícios do manual com os alunos. Esta aula foi importante para a professora estagiária, uma vez que permitiu conhecer um pouco melhor os alunos e estabelecer uma relação pedagógica mais próxima com a turma.

### **Preparação da aula**

Durante o processo de preparação da aula e elaboração do respetivo plano a professora estagiária articulou o seu trabalho com a professora titular da turma, a professora Ana Peres, a propósito da organização da aula e dos conteúdos a lecionar, e com a professora Rosário Lopes, sobre a elaboração do plano de aula e a sua adequação às características da turma.

Uma das principais preocupações na preparação da aula foi precisamente as características da turma, uma vez que se tratava de uma turma muito heterogénea e que apresentava um trabalho muito irregular. Um número significativo de alunos revelava grande desmotivação face à disciplina de matemática o que se refletia num fraco empenho na realização das tarefas propostas com consequências na avaliação. Atendendo ao constante desinteresse e desatenção dos alunos, a professora estagiária procurou sempre a preparação de uma aula que potenciase a participação e colaboração dos alunos, por exemplo, através da aplicação de conceitos já adquiridos em anos anteriores ou, até mesmo, explorando ideias intuitivas que os alunos pudessem ter da matéria a lecionar. No fundo, foi definido desde o princípio que o enfoque da aula deveria estar na dinamização de tarefas que potenciasses a motivação dos alunos para o tema e a sua participação na aula.

Atendendo a que a aula envolvia a leção de muitos conceitos, outra preocupação da professora estagiária partilhada logo de início com a professora Rosário Lopes, residia no facto de tentar encontrar uma estratégia para a aula, que permitisse transmitir essas definições e conceitos, a alunos que se apresentavam, na sua maioria, desmotivados pela disciplina. Seria necessário captar a atenção dos alunos e, para isso, a aula não poderia ser demasiado expositiva. Deste modo, a professora Rosário Lopes rapidamente aceitou a proposta de utilizar alguns diapositivos no decorrer da aula, que poderiam permitir que os alunos estivessem mais atentos e impor um ritmo mais adequado à aula. Esta estratégia foi também discutida com a professora Ana Peres, que a considerou muito interessante, pois possivelmente iria prender a atenção dos alunos, uma vez que fugia um pouco às aulas a que os alunos estariam habituados.

A professora estagiária teve particular cuidado na compreensão dos conceitos e definições a apresentar na aula, pois esta matéria é, atualmente, abordada de forma muito distinta comparativamente ao que acontecia nos anteriores programas. Assim, foi feita uma análise cuidada ao programa, às metas curriculares, ao caderno de apoio e ao manual adotado. Desta forma, foi possível ajustar e repensar na forma como iriam ser apresentados alguns pontos mais ambíguos, principalmente nalgumas definições, por exemplo, em relação ao conceito de linha poligonal, que não era clara nos instrumentos consultados.

Uma vez que a matéria apresentava muitas definições, a professora manteve sempre presente a ideia de mostrar aos alunos alguns exemplos mais fáceis e outros que os pudessem levar a alguns equívocos, procurando em seguida chamar à atenção para esses factos. Assim, seria possível ir ao encontro de um maior número de alunos, motivando aqueles que apresentavam mais dificuldades e falta de motivação perante a matemática e desafiando aqueles que apresentavam melhores desempenhos na disciplina.

### **Desenvolvimento da aula e considerações**

Tal como decorreu da preparação da aula, a professora estagiária optou por uma estratégia de aula que permitisse a contribuição dos alunos, recorrendo à projeção de alguns diapositivos para o desenvolvimento da aula, sendo que os alunos apenas copiaram para o seu caderno os conceitos que a professora estagiária considerou mais pertinentes, sendo a cópia dos restantes, presentes no manual, deixados como trabalho de casa. A professora estagiária tomou esta decisão, por forma a que os alunos gastassem menos tempo a copiar informação para os seus cadernos, maximizando a atenção dos alunos na compreensão dos novos conceitos.

Assim, a professora estagiária começou por apresentar uma parte da definição de linha poligonal, referindo apenas que se trata de uma sequência de segmentos de reta no plano. A professora optou por não incluir toda a definição para que não comesse a aula com uma definição demasiado complicada para os alunos. No entanto, reforçou diversas vezes que a definição carecia de mais algumas condições. A professora acompanhou a definição com alguns exemplos, estratégia que a acompanhou em todas as explicações e definições dadas. Depois disto, a professora introduziu a definição de lados e vértices de uma linha poligonal. Em seguida introduziu os conceitos de linha poligonal fechada e aberta e linha poligonal simples. Neste momento, em que os alunos mostraram compreender os conceitos até então introduzidos, a professora avançou com a definição formal de linha poligonal e, seguidamente, apresentou aos alunos alguns exemplos de sequências de segmentos de reta que fossem, ou não, linhas poligonais. Ao longo de todos os conceitos introduzidos, a professora procurou manter os alunos atentos e, para tal, incentivou constantemente o diálogo entre a turma.

A maioria das atividades que tinha previsto no plano de aula foram realizadas, ficando apenas por concluir os conceitos de ângulos externos e internos de um polígono. Considerando que já não seria benéfico para a aprendizagem dos alunos introduzir mais definições, no final de uma aula que já tinha sido tão rica em vocabulário e conceitos – a maioria deles novos para os alunos –, estes conceitos foram deixados para a aula seguinte.

Assim, a professora terminou a aula com um exemplo de aplicação da matéria que tinha sido abordada durante a aula, aproveitando o exemplo para chamar à atenção e reforçar a notação a utilizar em alguns conceitos de geometria tratados nesta e nas aulas seguintes. A perceção da professora estagiária, através deste exercício e do diálogo final com os alunos, é que estes assimilaram a maioria dos conteúdos lecionados durante a aula.

No final da aula, a professora estagiária reuniu com as professoras e com a colega de estágio para analisar algumas incidências da aula realçando, para além dos pontos fortes, aqueles que pudessem ser melhorados em aulas subsequentes. Globalmente, a visão das professoras é que a aula tinha sido bastante dinâmica e interativa. A professora titular da turma realçou este aspeto, referindo que os alunos tinham participado ativamente na aula e que estes tinham revelado muita atenção no decorrer da mesma, pelo que se tornou num aspeto muito positivo para as aprendizagens dos alunos. Além disto, as

professoras realçaram a necessidade de reforçar alguns conceitos de forma a melhorar a aprendizagem dos alunos, nomeadamente:

- A linha poligonal simples delimita no plano duas regiões disjuntas. As professoras consideraram que um dos objetivos específicos não tinha sido tão bem alcançado, pois deveria ter sido realçado que uma linha poligonal simples delimita no plano duas regiões disjuntas. Além disso, deveria ter sido mais realçado, teoricamente, os conceitos de vértices consecutivos e lados consecutivos. Embora as professoras tenham considerado que os alunos não tenham revelado dúvidas, seria importante esclarecer estes significados.
- Pontualmente fazer maior recurso ao quadro branco. Uma das professoras orientadoras considerou que a professora estagiária deveria ter complementado a aula, em determinados momentos, com o quadro branco, como forma de se aperceber de algumas dificuldades dos alunos, pois, embora vários alunos estivessem a participar e a dar um feedback positivo, seria importante confirmar se os alunos menos participativos também estavam a acompanhar a aula.
- Notação utilizada nos polígonos e linhas poligonais. As professoras chamaram ainda à atenção para que houvesse sempre cuidado em identificar os vértices, tanto dos polígonos como das linhas poligonais. Além disso, referiu que seria importante, num dos exemplos, chamar à atenção dos alunos para a notação de linha poligonal.
- Exemplos mais desafiantes no conceito de diagonal de um polígono. Uma das professoras sugeriu que fosse dado um exemplo com um retângulo quando foi introduzido o conceito de diagonal de um polígono, uma vez que um dos alunos quando viu uma das diagonais do quadrado disse “então a diagonal é um segmento que divide o quadrado ao meio”. Nesse sentido, o retângulo iria servir para chamar à atenção da diferença entre diagonal e eixo de simetria, pois, pela afirmação do aluno, não fica clara a sua perceção de diagonal de um polígono. Além disso, a professora considerou que seria interessante dar o exemplo de um triângulo, como um caso de um polígono que não tem diagonais. Efetivamente são exemplos muito bem observados e importantes para abordar numa próxima aula em que seja abordada esta matéria.

### **Autoavaliação**

A professora estagiária sentiu-se bastante confortável no decorrer da aula, pois sentiu rapidamente a aceitação dos alunos à matéria introduzida e à dinâmica da aula. Ao encontro da opinião das professoras, a professora estagiária também considerou que os alunos ficaram motivados para o tema e que, pela sua participação e entusiasmo, tenham contribuído positivamente para o sucesso da aula. A professora estagiária considerou todas as críticas muito pertinentes e relevantes para melhorar a aprendizagem dos alunos numa situação futura.

### 3.4.1.2. Segunda aula

A segunda aula lecionada pela professora estagiária à turma do 7.º ano foi assistida pela professora Ana Peres, professora titular da turma, pela professora Rosário Lopes, pela professora Doutora Maria Helena Santos e pela colega de estágio, Linda Cardoso. A aula lecionada realizou-se a 8 de fevereiro de 2018, quinta-feira, no primeiro de dois tempos letivos dos alunos. O conteúdo desta aula foi, essencialmente, as diferentes representações de uma função, inserido no subdomínio Funções, pertencente ao domínio Funções, Sequências e Sucessões (FSS7).

#### **Preparação da aula**

A professora estagiária manteve um contacto regular com a professora titular da turma a propósito dos conteúdos a lecionar, uma vez que estavam dependentes dos lecionados pela professora titular até à data prevista para a aula. Além disso, a professora também trocou várias impressões sobre os conteúdos a lecionar, nomeadamente algumas questões relativas às metas curriculares, e também sobre algumas metodologias possíveis para o desenvolvimento da aula, com a professora Rosário Lopes. As professoras ponderaram em conjunto o tipo de exemplos dados e a dinâmica que a aula iria assumir, sendo que a professora Rosário recebeu muito bem as ideias da professora estagiária quanto à realização de uma atividade interativa com a turma.

Uma das grandes preocupações da professora estagiária ao preparar a aula foi a definição de estratégias que pudessem promover a motivação dos alunos para o estudo do tema, dado tratar-se do início um conteúdo que será fundamental no percurso escolar dos alunos na disciplina. Nesse sentido, a professora estagiária procurou sempre a preparação de uma aula que potenciase a participação dos alunos na aula, de modo interativo e dinâmico, por forma a captar toda a atenção dos alunos.

Por seu lado, a professora estagiária analisou sempre com o maior cuidado as metas curriculares que envolviam os conceitos e definições no âmbito das funções, procurando sempre manter uma interpretação rigorosa das metas. Uma decisão tomada pela professora estagiária aquando da elaboração da aula, foi fazer a distinção entre gráfico e gráfico cartesiano. Embora o programa e as metas curriculares se refiram ao “gráfico” como uma simplificação para o termo “gráfico cartesiano” (quando não existe perigo de ambiguidade), a professora estagiária optou por utilizar a definição de “gráfico” que se encontra nas metas curriculares do 10.º ano de matemática A, por forma a não causar nenhum conflito entre as duas definições. Assim, a professora estagiária fez a distinção entre o conceito de “gráfico” e de “gráfico cartesiano”, à semelhança do que foi feito pela professora titular na introdução da matéria em questão.

Por último, a professora estagiária teve em consideração a construção de exemplos que pudessem suscitar dúvidas e questões, por forma a analisar a compreensão dos alunos em conceitos como o domínio, contradomínio, expressão analítica, gráfico, etc. Neste sentido, as funções que a professora estagiária considerou foram baseadas nas relações de “dobro de”, “metade de”, “raiz



quadrada de” e “quadrado de”, pois poderiam causar dúvidas, por exemplo, no domínio e contradomínio, caso os conceitos não estivessem bem claros para os alunos.

A aula desenvolveu-se em três partes, sendo que a ficha foi construída de modo a que a cada parte da aula fizesse corresponder uma parte da ficha. Quanto à parte A, o objetivo seria que os alunos fossem confrontados com diferentes representações de uma mesma função. A parte B, teria como ponto de partida a possibilidade de serem utilizadas diferentes representações para correspondências que representariam, ou não, funções. Por último, a parte C, teria como alvo a contextualização matemática num problema em contexto real, recorrendo à representação gráfica de uma função.

### Desenvolvimento da aula e considerações

A professora estagiária começou a aula pedindo aos alunos que recordassem os conteúdos abordados na aula anterior e que se relacionavam com o tema em estudo. Quando os alunos referiram que tinham abordado o tema das funções, mais propriamente a representações de funções, a professora disse aos alunos que o propósito da aula seria rever e sistematizar as formas de representação de uma função, através da resolução de uma ficha de trabalho. Nesse sentido, a professora estagiária explicou a parte A da ficha de trabalho - começando por referir que os alunos iriam receber uma ficha de trabalho com várias representações (todas diferentes) de 5 funções distintas das quais teriam de identificar uma que representasse a mesma função que a professora tinha projetado no quadro.

O primeiro obstáculo encontrado por alguns alunos adveio de não compreenderem exatamente o modo de resolução da tarefa, o que foi uma situação prevista pela professora, pelo que percorreu os vários lugares verificando quais os alunos que ainda não tinham compreendido o exercício e explicando sucintamente o que deveriam fazer. Esta dificuldade ficou colmatada a partir do segundo exemplo, momento em que a docente verificou que a maioria da turma tinha compreendido o que se pretendia. A professora estagiária considera que este facto decorreu da generalidade dos alunos apresentarem alguma estranheza perante as diferentes possibilidades de representações de uma função. Assim, muitos alunos, inicialmente, não compreenderam que a função projetada pelo professor poderia ser apresentada de outras formas, sendo uma delas aquela que os alunos tinham na sua ficha de trabalho, pelo que foi-lhes mais difícil, nesse caso, compreenderem logo o objetivo da tarefa.

Além disso, à semelhança do que já se previa através do plano de aula, os alunos fizeram alguma confusão entre conjunto de partida e conjunto de chegada, razão pela qual a professora estagiária optou por apresentar outro exemplo, como as funções representadas na Figura 7.

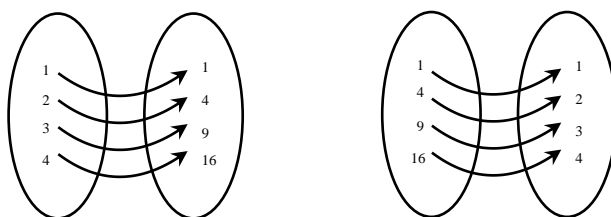


Figura 7: Exemplos de funções representadas na ficha de trabalho.

Diversos alunos “apontaram” para a função errada e que traduzia, na realidade, a função inversa da função projetada, referindo que se tratava da “mesma função, mas... ao contrário”, o que foi interessante observar e, permitiu, esclarecer esta confusão que surge muitas vezes ao introduzir a temática das funções.

Como forma de motivar os alunos, a professora estagiária encorajou o primeiro par a encontrar uma diferente representação para a função projetada solicitando a sua apresentação no quadro e partilhando-o com os colegas, criando dessa forma um ambiente de “competição saudável” entre a turma. O facto de os alunos terem de apresentar as funções aos colegas também permitiu que ganhassem alguma prática na representação de uma função utilizando diferentes formas, o que se revelou bastante entusiasmante para os alunos, aumentando o seu empenho durante a aula.

O desenvolvimento da aula diferenciou-se do plano de aula que a professora estagiária tinha inicialmente previsto, uma vez que apenas conseguiu, durante o primeiro tempo, concretizar a parte A do plano. Embora não tenha sido possível colocar em prática todo o plano, o que foi desenvolvido em aula convergiu com o que estava definido no plano de aula. A necessidade de dar maior tempo à primeira parte da aula prendeu-se, essencialmente, com a vontade de prender a atenção de todos os alunos, no sentido de os motivar para o estudo do tema, uma vez que todos eles se mostravam empenhados em acompanhar o desenrolar da aula. Apesar do cumprimento incompleto do plano de aula, tanto a professora estagiária como as professoras orientadoras, consideraram que a aula tinha sido relevante e produtiva para os alunos, uma vez que a sua maioria tinha participado ativamente, o que mostrou ser um aspeto muito positivo da aula, dado o conhecimento que se tinha do habitual desinteresse e fraco desempenho da turma face à disciplina.

Como aspetos de melhoria, as professoras referiram que poderia ter sido realçado os conjuntos de partida e chegada das funções representadas por tabelas, sendo que no exemplo, a linha do  $x$  e do  $y$  representava, respetivamente, os elementos do conjunto de partida e do conjunto de chegada, mas que, num caso genérico, pode não ser representado dessa forma. Além disto, as professoras consideraram que poderia ter sido mais explorada a expressão analítica das funções, uma vez que um dos alunos quando foi ao quadro revelou algumas dúvidas sobre a expressão  $y = 2x$ , tentando escrever, complementarmente, a expressão em função de  $x$ .

Outra consideração feita pelas professoras orientadoras foi relativamente à gestão do quadro. A professora estagiária optou por fazer a divisão do quadro em quatro, sendo que em cada parte os alunos deveriam representar a função nas suas formas alternativas. Esta metodologia revelou-se produtiva para a interação com os alunos, tal como já referido, embora a professora estagiária tenha deixado, por alguns momentos, as representações da primeira função, enquanto projetava a segunda, o que é de evitar, pois os alunos poderiam, num momento de distração, estabelecer uma correspondência errada. Este lapso foi retificado imediatamente pela professora estagiária logo a partir da segunda função. No entanto, é outro aspeto merecedor da reflexão da professora estagiária para melhoria futura.

#### **Autoavaliação**

A professora estagiária procurou dinamizar uma aula mais interativa e participativa. Nestes moldes, a aula procurou ir ao encontro do empenho revelando pelos alunos, o que, à partida, poderia trazer dificuldades na dinâmica da aula. Assim, tinha-se em vista a captação da atenção dos alunos e a motivação deles para o estudo do novo tema e para a disciplina. Apesar desta potencial dificuldade, a professora estagiária, à semelhança da opinião das professoras orientadoras, considera que a aula foi interessante, contribuindo positivamente para a aprendizagem dos alunos e para a compreensão destes relativamente aos conceitos tratados na aula lecionada. Todos os pontos referidos pelas professoras Maria Helena Santos e Rosário Lopes foram retidos pela professora estagiária que irá considerá-los em futuras situações.

### 3.4.1.3. Terceira aula

A terceira aula assistida lecionada pela professora estagiária à turma do 7º ano foi assistida pela professora Ana Peres, professora titular da turma, pela professora Rosário Lopes, pela professora Doutora Maria Helena Santos e pela colega de estágio, Linda Cardoso. A aula lecionada realizou-se a 30 de abril de 2018, segunda-feira, e teve a duração de um tempo letivo. O foco da aula foi a resolução de problemas envolvendo equações lineares, no domínio da Álgebra (ALG7).

#### **Preparação da aula**

Durante a preparação da aula, a professora estagiária contactou com as professoras orientadora e titular da turma, partilhando com ambas as estratégias pensadas para a aula. A professora estagiária apresentou sempre bastante preocupação na criação de problemas contextualizados que fossem apelativos e que suscitasse curiosidade aos alunos, não só pelas características da turma como também pela sua relação, por vezes pouco próxima, com a disciplina. Assim, a professora optou por elaborar fichas de trabalho que contemplassem uma sequência de problemas que fossem diferentes entre si e que se apresentassem num grau crescente de dificuldade, mais concretamente, um aumento no grau de complexidade das equações que os traduzem ou da sua interpretação. Além disso, a professora pensou que seria interessante começar a aula com problemas de “magia”, cuja resolução envolvesse equações, pelo que incluiu na sua ficha de trabalho 3 problemas de Matemagia. Estes problemas serviriam para suscitar o interesse e curiosidade no início da aula, de forma a conseguir ter a atenção dos alunos.

As professoras consideraram interessantes as ideias da professora estagiária e, neste sentido, o plano de aula contemplou tudo a professora o que tinha analisado com as docentes. Embora a professora estagiária soubesse do curto espaço de tempo que tinha disponível, optou por construir um plano de aula que pudesse, numa situação futura, ser implementado em mais do que um tempo letivo de modo a preparar detalhadamente o tópico em causa. Apesar disso, foi salvaguardada essa situação e prevista a sua continuação com os alunos na aula seguinte, por forma a realizar alguns problemas que pudessem não ser realizados no primeiro tempo da aula.

### **Desenvolvimento da aula e considerações**

A professora estagiária começou por distribuir as fichas de trabalho que continham os problemas de “Matemagia” e os problemas matemáticos. Em seguida, a professora deu início à sua aula, fazendo uma abordagem lúdica com 3 problemas de magia, com recurso ao tópico que estava em destaque na aula, as equações. No primeiro problema de “Matemagia”, a professora pediu a colaboração de um voluntário e, logo nesse momento, a professora sentiu um grande envolvimento da turma, conseguindo captar a sua atenção. Esse entusiasmo foi visível até ao último problema de “Matemagia”, em que a professora envolveu a turma toda, realizando o truque de magia com todos os alunos. Este consistia em “adivinhar” o dia e mês do aniversário de cada um deles. Os alunos, naturalmente, ficaram inquietados, o que gerou algum burburinho, mas a professora estagiária conseguiu gerir a turma. Como seria necessário realizar alguns cálculos sucessivos e envolvendo algum grau de dificuldade, a professora pediu que utilizassem a calculadora dos seus telemóveis. Esta foi considerada uma boa oportunidade para utilizar as novas tecnologias no contexto de sala de aula e captar a atenção dos alunos durante a aula, que foi um dos principais objetivos previamente definidos. Os alunos mostraram-se muito interessados na realização desta atividade, o que gerou algum ruído, mas a professora acabou por conseguir gerir a turma de forma a ter a atenção necessária para prosseguir com o desenvolvimento da aula. Os alunos foram desafiados a tentarem descobrir os “truques” por detrás de cada um dos desafios. Esta foi encarada como uma oportunidade para que os alunos mais motivados fizessem algumas manipulações algébricas e pudessem compreender que não existe realmente “magia”, mas sim “matemática”.

Após a realização da tarefa “Matemagia”, a professora estagiária distribuiu os cartões individuais do *Plickers*. O *Plickers* é uma aplicação que permite que ao professor recolher as respostas dos alunos a questões de escolha múltipla. Na prática, para selecionar a sua resposta, o aluno deverá utilizar o seu cartão individual e colocá-lo na orientação correspondente à resposta que quer dar (A, B, C ou D). É importante referir que os resultados são projetados enquanto os alunos vão respondendo às perguntas, mas não são identificadas as respostas dadas por cada aluno. Isto garante que os alunos possam estar confortáveis em responder sem receio de dar uma resposta incorreta, ao mesmo tempo que permite explorar possíveis erros que os alunos cometam, sem expor diretamente nenhum aluno.

Depois de proceder à explicação sobre o funcionamento básico do *Plickers*, a professora mostrou um exemplo para que os alunos testassem a atividade. Os alunos mostraram-se muito entusiasmados e empenhados durante a realização da tarefa. A professora, depois de todos responderem, explicava qual a resposta certa e, no caso de haver alunos que não tenham respondido corretamente, apresentava ainda as justificações para que as outras opções não fossem verdadeiras. Tudo isto foi feito sempre com a participação dos alunos e salvaguardando a identidade dos alunos que não respondiam corretamente às questões. É interessante verificar que, de facto, gradualmente os alunos foram apresentado menos uniformidade nas respostas, ou seja, a intenção de ir apresentando questões mais

complicadas, efetivamente verificou-se e os alunos foram errando cada vez mais ao longo das questões, tal como é visível pelos gráficos ilustrados na Figura 8.

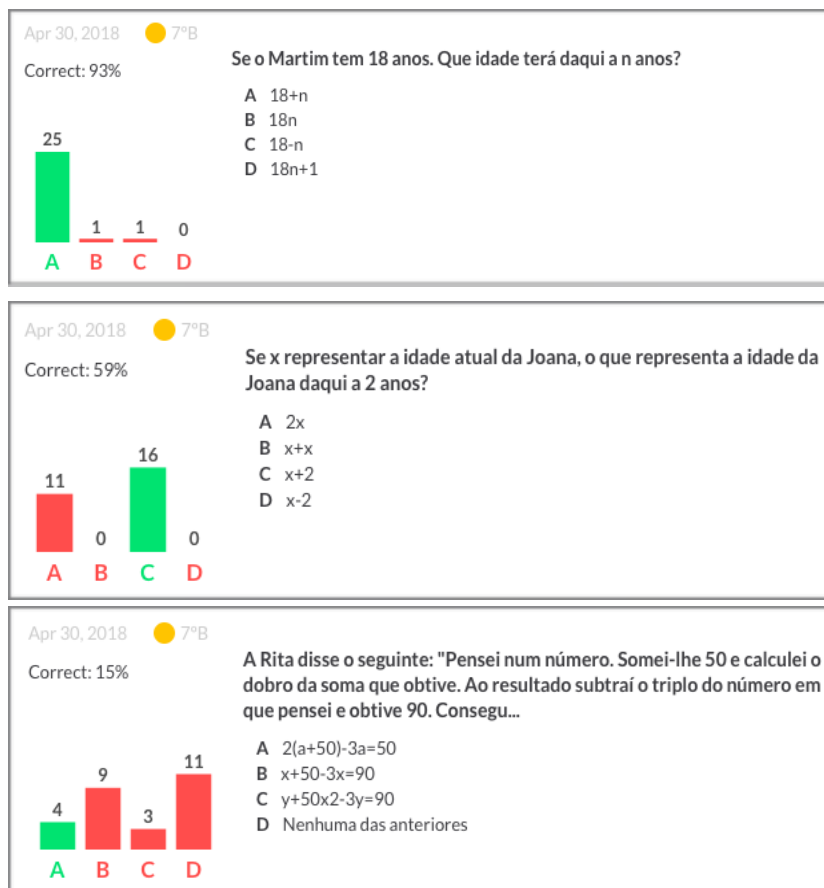


Figura 8:  
questões e  
no Plickers.

Exemplos de  
respostas dadas

A professora utilizou esta metodologia também como oportunidade para rever alguns conceitos que tinham sido abordados há algumas aulas aquando do início do estudo das equações, e que seriam fundamentais para a resolução dos problemas que iriam ser apresentados em seguida. Por questões de tempo, apenas se realizaram 5 das 9 questões que se tinham previamente elaborado, para que restasse mais tempo para abordar a resolução de problemas. A apresentação dos problema à turma iniciou-se com um exemplo, que os alunos aceitaram bem e que foi escolhido como forma de ir percorrendo as várias fases de resolução de um problema. As professoras orientadoras consideraram que o problema poderia ter sido mais simples, embora os alunos o tenham conseguido compreender. A professora estagiária optou por utilizar um exemplo não tão simples uma vez que iria resolvê-lo com os alunos, deixando alguns problemas mais simples para serem resolvidos autonomamente pelos alunos.

Pela agitação revelada pela turma, não foi possível avançar para a resolução de mais problemas, pelo que a professora deixou como tarefa para casa, a resolução de um conjunto de 8 problemas que constavam da ficha que tinha entregue no início da aula.

No final da aula, a professora estagiária reuniu com a professora titular, com as professoras orientadoras e com a colega de estágio para analisar o desenvolvimento da aula. As professoras orientadoras e a professora titular consideraram que, apesar do alvoroço despoletado pelas atividades, inevitável pelo interesse e curiosidade que as tarefas despertavam, a aula tinha corrido bastante bem e a gestão da sala de aula tinha sido adequada às reações dos alunos. Além disso, apesar de não ter sido possível realizar mais problemas, as professoras consideraram que tinha sido atingido um patamar importante do plano de aula e bastante satisfatório face às características da turma. Foram ainda destacados mais alguns pontos relativos à aula lecionada, que se detalham em seguida.

A tarefa inicial “Matemagia” foi muito positiva e provocou grande entusiasmo e motivação no início da aula, pelo que foi uma forma muito interessante de introduzir o tema. Embora a professora estagiária tenha sugerido aos alunos tentarem, em casa, compreender as equações envolvidas, as professoras consideraram que provavelmente muitos dos alunos não iriam realizar esta tarefa, dado o fraco aproveitamento e empenho de um número significativo de alunos da turma. No entanto, a professora estagiária considerou esta tarefa apenas um desafio para os alunos mais interessados, não constituindo de forma nenhuma uma obrigatoriedade.

Utilizar as sugestões dadas pelos alunos durante a tarefa com recurso ao *Plickers*. A professora estagiária deverá aproveitar melhor as sugestões dadas pelos alunos, embora as professoras orientadoras tenham compreendido que tal nem sempre foi possível dada a conversa entre muitos alunos, que condicionou a identificação das intervenções de alguns alunos. Em todo o caso, é um ponto relevante que deve ter-se em atenção procurando delinear-se estratégias que possam facilitar o acompanhamento das intervenções de um maior número de alunos da turma.

Realizar todos os exercícios do *Plickers*. A professora estagiária deveria ter realizados todos os exercícios propostos, por serem muito pertinentes para a resolução de problemas. Tal como já mencionado, o facto de a professora estagiária ter a intenção de iniciar o tópico da resolução de problemas levou-a a deixar 4 exercícios para fazer posteriormente. Apesar disso, a escolha dos desafios não foi aleatória, concretizando aqueles que considerou mais relevantes para os problemas. Em todo o caso, efetivamente, o ideal teria sido realizar todos os exercícios planeados, uma vez que foram pensados com alguma sequencialidade contendo variadas situações com que os alunos se iriam deparar durante a resolução de problemas.

### **Autoavaliação**

A professora estagiária optou por uma aula muito interativa, escolhendo o programa *Plickers* para o efeito. A professora sabia que iria ser uma aula bastante agitada e potenciadora da conversa entre os alunos, mas o risco foi compensado pela postura genuinamente interessada que os alunos apresentaram no decorrer da aula. Globalmente, o empenho e esforço da professora estagiária foram visíveis e, apesar do comportamento mais conversador de alguns alunos, a gestão da sala de aula foi ajustada. A professora estagiária, tal como tinha salvaguardado previamente, considera que a aula

deveria ter, pelo menos, a duração de 2 tempos letivos, por forma a rentabilizar melhor as tarefas planeadas para os alunos no contexto de resolução de problemas envolvendo equações lineares.

Em suma, à semelhança da opinião das professoras orientadoras, a professora estagiária considera que a aluna foi produtiva e interessante para os alunos, contribuindo para potenciar a sua motivação face à aprendizagem na disciplina de matemática.

### 3.4.2. Direção de Turma

Durante o ano letivo, a professora estagiária acompanhou a diretora de turma do 7.º ano, Professora de Informática, Helena Calado. As funções da direção de turma foram desenvolvidas num tempo letivo por semana, normalmente às quintas-feiras das 11:20 às 12:10. Entre outras tarefas realizadas pela diretora de turma, a professora estagiária pôde acompanhá-la nas seguintes: organização do dossier da turma no início do ano letivo e a sua atualização ao longo do ano; elaboração do plano de turma; preparação das reuniões intercalares e de avaliação; elaboração dos planos individuais dos alunos; justificação de faltas no sistema de gestão adotado pela escola (GIAE); atendimento telefónico e presencial dos pais e encarregados de educação; participação nas reuniões de avaliação, intercalares e de encarregados de educação; etc.

A turma acompanhada pela professora tinha vários casos de indisciplina, pelo que constituiu uma experiência muito enriquecedora ao nível do trabalho de um diretor de turma num contexto problemático. Além do contacto direto com a turma de 7.º ano, a professora estagiária contactou com outros diretores de turma, que partilharam com ela alguns problemas que atravessavam com as suas turmas o que também contribuiu para o enriquecimento pessoal e profissional da professora.

## 3.5. Componente não letiva

### 3.5.1. Projeto Pedro Nunes

O grupo disciplinar de matemática elaborou no final do ano letivo 2016/2017 o Projeto Pedro Nunes (PPN). Este projeto pretende trazer um maior sucesso à disciplina de matemática, tanto ao nível do 3.º ciclo do ensino básico como do ensino secundário. O PPN consistia, sucintamente, no reforço do apoio à disciplina de matemática, com benefícios para todos os alunos. Assim, para que os alunos que tinham um fraco desempenho e tinham maior dificuldade em acompanhar as aulas pudessem melhorar e para aqueles que tinham um excelente desempenho potenciassessem todas as suas capacidades. Este reforço à disciplina é realizado por dois processos diferentes:

- através de assessoria, em que um docente se desloca à sala de aula de uma turma e pode acompanhar algum grupo de alunos referenciado pela docente titular ou ajudar globalmente a turma.

- através do apoio a um reduzido número de alunos que é selecionado pela professora da turma e que se desloca a um gabinete/sala de estudo, onde se encontra um, ou mais, professores para os ajudarem na realização das tarefas propostas pelo professor titular. Os alunos, globalmente, mostraram-se entusiasmados e interessados com a participação neste projeto, referindo sempre que sentiram que seria vantajoso para as suas aprendizagens e manifestando o desejo de trabalharem sempre em pequeno grupo fora da sala de aula.

Os principais objetivos preconizados por este Projeto são: reduzir o número de classificações negativas, na disciplina de Matemática, com ênfase no 7.º ano de escolaridade; cumprir as metas curriculares preconizadas nos programas de Matemática, em cada ano letivo; proporcionar aos alunos com boas classificações um ambiente de trabalho que permita o aprofundamento dos seus conhecimentos; tornar possível um trabalho regular e mais individualizado com os alunos com classificação negativa, na disciplina de Matemática; melhorar o clima de trabalho na sala de aula, combatendo eventuais situações de indisciplina; criar condições facilitadoras de uma melhor gestão do currículo no que se refere ao seu cumprimento; entre outras.

Durante o 1.º período a professora participou neste projeto colaborando com o professor da turma do 10.º C na disciplina de MACS. A professora escolheu o seu horário de colaboração em função de um horário de MACS, uma vez que queria ampliar os seus conhecimentos e ter uma melhor ideia dos conteúdos programáticos desta disciplina. Ainda nesse período e continuando no seguinte a professora recebeu alguns alunos do 7.º C e do 8.º A na sala de estudo, uma vez que eram duas das turmas que estavam a ter aula de matemática durante o horário que a professora se encontrava a colaborar no projeto. No final do 2.º período a professora, depois de conversar com a professora Rosário e perceber que a turma de 11.º ano estava a ter muitas dificuldades, a professora optou por permutar o horário que tinha e frequentar as aulas da professora de modo a colaborar com esta, no sentido de proporcionar aos alunos mais apoio em sala de aula. A professora continuou esse apoio durante o 3.º período.

Na Tabela 11 está sistematizada a informação relativa às turmas que a professora estagiária apoiou no âmbito do Projeto Pedro Nunes.

Tabela 11: Turmas de apoio no projeto Pedro Nunes

<b>Período</b>	<b>Turmas de Apoio</b>
<b>1.º Período</b>	<b>MACS 10.ºB (Coadjuvação) + matemática 8.º (Sala de Estudo)</b>
<b>2.º Período</b>	<b>matemática 8.º (Sala de Estudo) + matemática A 11.º A (Coadjuvação)</b>
<b>3.º Período</b>	<b>matemática A 11.ºA (Coadjuvação)</b>

### 3.5.2. Projeto Primitivação e Integração

No âmbito do estágio pedagógico, a professora estagiária tinha como objetivo desenvolver um projeto que integrasse a comunidade educativa e contribuísse para o enriquecimento dos alunos ou dos



próprios professores. Neste sentido, a decisão da professora estagiária passou por construir, em colaboração com a professora Rosário Lopes, um projeto que culminasse na ida dos alunos a uma aula da Universidade. Neste sentido, pelo facto de os temas Primitivas e Cálculo Integral serem, no presente ano letivo, considerados optativos para lecionação, mas serem extremamente importantes no ensino superior, as professoras consideraram que poderia ser esse o tema mais ajustado para dar cumprimento aos objetivos das professoras.

Assim, o projeto consistiu na lecionação de algumas aulas para a abordagem aos conceitos mais elementares de Primitivas. Mais tarde, no dia 16 de maio de 2018, os alunos deslocaram-se à Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa para assistirem a uma aula Teórica, cujo enfoque estivesse no Cálculo Integral, e uma aula prática, que se centrasse na Primitivação. A calendarização detalhada das atividades encontra-se na Tabela 12.

As sessões prévias, em que se abordou o tema Primitivas, envolveram conceitos básicos e a resolução de alguns exercícios práticos de modo a que os alunos tivessem algumas bases quando fossem assistir à aula na faculdade. As aulas de Primitivação tiveram de se desdobrar em duas datas diferentes, pois o Projeto era transversal a todas as turmas de 12.º ano (A, B e D), o que representa um total de 50 alunos, pelo que houve necessidade de reduzir o número de alunos por aula.

Tabela 12: Calendarização das atividades na FCT-NOVA.

<b>Data</b>	<b>Atividades desenvolvidas</b>
<b>18/04/2018</b>	Introdução ao tema Primitivas: Primitivação Imediata + Resolução de Exercícios
<b>20/04/2018</b>	
<b>09/05/2018</b>	Primitivação por Partes: Resolução de Exercícios + Esclarecimento de dúvidas
<b>11/05/2018</b>	
<b>16/05/2018</b>	Aula Teórica (10:00 – 11:00) + Aula Prática (11:00 – 12:30)

A professora estagiária agilizou todo o processo com os docentes da faculdade de modo a conseguir encontrar condições para a presença dos alunos numa aula do ensino superior. É de realçar que o objetivo seria precisamente os alunos assistirem a uma aula “ao vivo”, real, conhecendo, desse modo, um pouco dos hábitos e a realidade de um Estudante Universitário. Desta forma, os alunos poderiam desmistificar alguns medos e receios que pudessem ter relativamente ao ensino superior.

Esta experiência foi extremamente enriquecedora, tanto para os alunos como para as professoras, por diversos motivos. Para além dos alunos conhecerem um pouco melhor o mundo universitário, puderam adquirir novos conhecimentos e consolidar os já adquiridos. Além disso, as professoras puderam observar algumas estratégias para a introdução do tema Cálculo Integral e travar alguns contactos com a Universidade, o que é uma mais valia, principalmente para docentes de alunos pré-universitários.

### 3.5.3. Visitas de Estudo

A professora estagiária pôde acompanhar as turmas do 12.º ano, no dia 30 de maio de 2018, à visita a Mafra, no âmbito da disciplina de Português. O mote desta visita era “E se Ricardo Reis viesse a Mafra...” e tinha como principal objetivo o envolvimento dos alunos na leitura da obra *O Ano da Morte de Ricardo Reis*, de José Saramago. Nesta visita, a professora compreendeu que nem sempre é fácil controlar o comportamento dos alunos e que é necessário ter alguma assertividade na maneira como nos dirigimos aos alunos que demonstram algum comportamento desajustado. Esta atitude é extremamente importante por forma a deixar uma boa imagem, tanto dos professores, como dos alunos e da escola que estes representam.

Além desta saída, a professora estagiária também acompanhou os alunos, na atividade desenvolvida por si e pela professora Rosário Lopes, na ida à Faculdade de Ciências e Tecnologia, da Universidade Nova de Lisboa, tal como abordado no ponto anterior.

### 3.5.4. Reuniões assistidas

A professora estagiária frequentou assiduamente as reuniões do grupo disciplinar de matemática e do departamento de matemática e ciências experimentais, que se realizaram durante o ano letivo às quintas-feiras à tarde. Nas reuniões do grupo disciplinar de matemática foram discutidos e tratados diversos assuntos, entre os quais a elaboração das planificações de médio e longo prazo, os critérios específicos de avaliação em alguns anos escolares, as atividades realizadas no dia do patrono, as questões referentes ao plano de ação de melhoria ou ao projeto Pedro Nunes. As reuniões de Departamento visaram a divulgação de algumas informações e à votação de várias propostas em discussão no Agrupamento, versando sobre diferentes assuntos.

Além destas, a professora estagiária também esteve presente na maioria dos conselhos de turma relativos às turmas do 7.º e do 12.º ano que acompanhou, o que contribuiu para o seu enriquecimento pessoal e profissional, pois permitiu conhecer melhor os alunos que acompanhava, os seus contextos pessoais e as suas características nas outras disciplinas. Nas reuniões da turma do 7.º ano, foi possível conhecer, refletir e compreender as inúmeras problemáticas com que os professores se confrontam no seu dia a dia e encontrarem estratégias comuns para combater as situações que decorreram ao longo do período. Por exemplo, foi possível acompanhar os casos de indisciplina ou de insucesso, os casos em que os pais não atendiam as chamadas nem contactavam com a escola, estando os alunos em risco de não transitar ou os casos de contexto familiares muito complexos que influenciam o desempenho dos alunos na escola. Já nas reuniões da turma do 12.º ano as situações eram de outra natureza, sendo a principal preocupação as notas, as informações para exames e a entrada no ensino superior. O comportamento destes alunos não apresentou grande preocupação, embora tenha sido por diversas vezes referida a conversa constante entre os alunos, principalmente nos dois primeiros períodos.

### 3.6. Reflexão Crítica sobre a Prática Pedagógica

*Ser professor tem de ser uma paixão – pode ser uma paixão fria, mas tem de ser uma paixão.*

*Uma dedicação.*

**Rómulo de Carvalho**

Dada a tarefa difícil que a professora estagiária tem agora em mãos, que é refletir sobre um ano letivo repleto de aprendizagens e de absorção constante de conhecimentos, será feita uma síntese com as principais aprendizagens adquiridas, numa perspetiva crítica, consciente e de aprendizagem.

Começando pela atividade que ocupou a maioria dos dias, a observação de aulas da professora orientadora, professora Rosário Lopes, é possível concluir que esta proporcionou um enorme enriquecimento não só a nível profissional, mas também pessoal. A vasta experiência de ensino e de avaliação foram visíveis em todas as aulas da professora e permitiram, aos alunos receber um ensino de excelência. As observações de conteúdos relevantes em situação de exames, as chamadas de atenção para erros frequentemente cometidos pelos alunos em situações de provas ou os incentivos para as demonstrações e para a utilização de um raciocínio lógico e fundamentado ocuparam sempre um lugar privilegiado nas aulas da docente, que presou sempre pelo rigor no discurso e pela coerência no raciocínio.

De modo a usufruir de todas as aprendizagens que poderia, a professora estagiária frequentou com alguma assiduidade as aulas da turma de 11.º ano. Sendo uma turma com características muito distintas da turma de 12.º ano que foi acompanhada, foi possível ter perceção das diferenças na forma de gestão das duas turmas. Na verdade, a turma de 11.º ano era muito mais conversadora, o que, por vezes, se refletia em alguma desatenção e falta de concentração. A professora orientadora soube sempre gerir da melhor forma as situações de perturbação da sala de aula, evitando sempre medidas extremas, como por exemplo, a expulsão de alguns alunos da sala de aula. Apesar disso, esta turma era bastante interessada e participativa, o que levava a que o trabalho em aula não rendesse tanto quanto a professora titular desejaria. Em oposição a esta situação, com a turma do 12.º ano era possível utilizar mais tempo para a resolução de exercícios, uma vez que a maioria dos alunos raramente colocava dúvidas durante o período da aula dedicado à lecionação de conteúdos. No entanto, um número significativo de alunos, preferia recorrer à memorização para alcançar rápida e facilmente os bons resultados, em detrimento de uma aprendizagem sólida com origem na compreensão e na estruturação do pensamento. Além das questões até agora mencionadas, a observação de aulas na turma de 11.º ano permitiu à professora estagiária conhecer um maior número de metodologias didáticas e pedagógicas para abordar os conteúdos do programa de 11.º ano, o que é sempre uma mais valia para o seu futuro enquanto docente.

A observação de aulas da professora orientadora foi uma atividade que a professora estagiária levou com o maior empenho e entusiasmo. Em todas as aulas assistidas, a professora estagiária tomava

notas pessoais e questionava quando não compreendia alguma explicação. O facto de a professora estagiária estar sentada perto dos alunos, permitiu, por um lado observar a aula do ponto de vista dos alunos, conseguindo aperceber-se do comportamento destes em determinadas situações, o que provavelmente não seria possível do ponto de vista do professor. Por outro lado, permitiu acompanhar melhor as aprendizagens dos alunos, uma vez que a professora se apercebeu de conversas que os alunos cruzavam paralelamente à aula, nas quais demonstravam quando não estão a compreender algum assunto tratado. É importante realçar que foi bastante interessante verificar que gradualmente a professora estagiária deixou de representar um elemento externo ao grupo, sendo que, a partir desse momento, os alunos mantiveram os comportamentos e atitudes que teriam se a professora estagiária não estivesse lá.

Em todas as aulas, a professora estagiária teve sempre uma atitude proactiva e de intervenção na aula, contribuindo para maximizar o apoio aos alunos na aula e minimizando os momentos de desconcentração de alguns alunos. Ou seja, nas aulas de carácter mais prático, a professora estagiária colaborou sempre com a professora titular, esclarecendo dúvidas aos alunos e ajudando a manter a ordem em sala de aula.

As professoras, nos intervalos e no final das aulas, conversaram sempre sobre as estratégias levadas a cabo pela professora titular, sobre as preocupações desta relativamente ao empenho e aproveitamento de alguns alunos da turma, sobre as opções programáticas ou sobre outros assuntos pertinentes para a prática docente. Todos estes diálogos enriqueceram os conhecimentos da professora estagiária e, gradualmente, desmistificavam algumas inquietações que esta tinha face aos mais diversos temas que envolvem a atividade docente, nomeadamente o concurso nacional de professores, os exames nacionais, o programa e as metas curriculares, a progressão na carreira, etc.

Outra atividade que teve bastante peso no trabalho da professora estagiária, foram as aulas que esta lecionou e que foram assistidas pelas professoras orientadoras. Estas aulas foram extremamente positivas, não apenas pela forte preparação que foi preciso fazer de modo a proporcionar as melhores metodologias de ensino aos alunos, bem como pela consecutiva consolidação por parte da professora estagiária dos conteúdos lecionados, dum ponto de vista pedagógico. Ainda como ponto positivo a reter da experiência das aulas lecionadas, estão as aprendizagens que foram adquiridas através das apreciações feitas pela professora Doutora Maria Helena Santos e pela professora Rosário Lopes, que partilharam todas as opiniões baseadas nas suas experiências de ensino. Todos os momentos de reflexão e partilha foram, posteriormente, alvo de reflexão por parte da professora estagiária, de modo a corrigir ou aperfeiçoar as suas metodologias de ensino nas aulas seguintes.

Além das aulas das turmas referidas, a professora ainda proporcionou o acompanhamento de uma turma do 7.º ano, com a coordenação da professora Ana Cristina Peres. Esta oportunidade permitiu que a professora estagiária se deparasse com as enormes diferenças que existem entre uma turma de 3.º ciclo do ensino básico e uma turma de ensino secundário. Esta diferença tornou-se mais acentuada pelo facto de as turmas em comparação serem de 7.º e 12.º ano.

De facto, a turma de 7.º ano revelou desde o princípio muita desmotivação e desinteresse perante a disciplina, o que foi a tarefa cuja gestão foi mais desafiante durante o ano letivo. Foi, sem dúvida, complicado conseguir cativar a atenção dos alunos. Relativamente às práticas pedagógicas levadas a cabo, dadas as características da turma, a professora titular recorreu sempre à utilização de exemplos próximos à realidade dos alunos. No entanto, é importante realçar que a professora o conseguiu fazer de forma muito profissional, isto é, não baixando o grau de exigência e rigor, conseguiu dar exemplos muito próximos da realidade dos alunos e que os fazia compreender melhor os temas que potencialmente poderiam ser mais complexos.

Um aspeto também a realçar foi a sinceridade e transparência que sempre acompanharam a professora nas suas aulas, o que levou a que conseguisse ganhar a confiança dos alunos, gerindo assim de forma muito eficaz as situações mais delicadas. As aulas lecionadas pela professora Ana Peres foram, sem qualquer dúvida, uma grande inspiração para a futura atividade docente da professora estagiária. Assim, o respeito, a sinceridade e a compreensão para com as aprendizagens dos alunos devem ser constantes na atividade de docência, não precisando, para tal, de reduzir o nível de rigor na leção das aulas.

Além da experiência diretamente transmitida pelas professoras Rosário Lopes e Ana Peres, foi possível trocar múltiplas experiências, das mais diversas disciplinas, nas conversas cruzadas na sala de professores. Efetivamente, uma das aprendizagens mais gratificantes no estágio pedagógico, foi a troca de opiniões com outros docentes, o que contribuiu para que a professora se apercebesse das principais problemáticas inerentes à profissão docente, como por exemplo questões relacionadas com a indisciplina ou com a carreira docente. Foi interessante “viver por dentro” uma situação que afetou o final do ano letivo, a greve dos professores às reuniões de avaliação. Esta questão permitiu que a professora se colocasse mais a par da progressão da carreira docente e da contagem do tempo de serviço. Também foi particularmente relevante perceber de que forma se agiliza todo o processo de marcação de reuniões e de que forma as reuniões de avaliação influenciam o processo de lançamento de notas de exames e de entrada no ensino superior.

Além destas atividades mais evidentes no desenvolvimento do estágio pedagógico, a professora também teve a oportunidade de vigiar testes de avaliação e, em particular, dois testes globais, com exigências semelhantes aos Exames Nacionais, o que lhe permitiu compreender as tarefas que os professores têm de concretizar no dia de realização de uma prova, como por exemplo a distribuição dos alunos por sala, a impressão de diferentes versões, a reserva de espaços físicos para a realização das provas, entre outras. Além de vigiar provas, a professora pôde corrigi-las e classificá-las com a orientação e ajuda da professora Rosário. Dado que este é um processo de grande enfoque na atividade docente, os momentos de discussão de ideias e partilha de opiniões com a professora orientadora transformaram-se numa experiência extremamente importante e relevante para a futura prática letiva.

Outro aspeto a realçar foi a oportunidade de poder acompanhar os alunos em visitas de estudo, o que permitiu que a professora estagiária conhecesse os principais tramites para a organização de uma

saída de alunos, compreendesse a dificuldade que representa controlar o comportamento dos alunos e valorizasse a importância de uma aprendizagem conseguida fora da sala de aula, uma vez que, no caso da visita de estudo no âmbito de Português, os alunos conseguiram ter uma perspetiva diferente daquela que têm habitualmente perante uma abordagem mais tradicional. A par desta visita de estudo, a saída que a professora estagiária também acompanhou, numa atividade organizada por si e pela professora Rosário Lopes à Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, inserida no projeto de lecionação de conteúdos de primitivação e integração. Esta atividade despoletou todo o espírito dinâmico que a professora considera uma mais valia na atividade docente. Sem dúvida alguma que é necessário pensar em atividades que permitam aos alunos conhecerem novas realidades, ultrapassem os limites dos seus conhecimentos e valorizem todas as suas potencialidades, pois, dessa forma, os alunos poderão melhorar a sua motivação na sala de aula e, consequentemente, o seu desempenho.

É importante ainda refletir sobre o trabalho de acompanhamento da direção de turma, que permitiu ter melhor consciência da envolvimento que esta tarefa implica, tanto a nível profissional como pessoal. Esta atividade permitiu conhecer o sistema informático utilizado pela escola para o lançamento de faltas, notas, etc. e ter consciência das diversas normas legislativas inerentes à regulação de uma direção de turma. Além disso, foi importante compreender que é necessário conhecer cada aluno, o seu contexto e extravasar um pouco os limites do tradicional professor de sala de aula, para apoiar os alunos noutros aspetos, eventualmente mais delicados.

As reuniões assistidas pela professora estagiária, tanto ao nível de conselho de turma, de departamento ou de encarregados de educação, permitiram ter contacto com alguns aspetos que a professora não tinha qualquer conhecimento antes de iniciar o estágio pedagógico. A professora compreende agora que assuntos são tratados nas reuniões, tanto de área disciplinar, como avaliação ou de departamento, assim como compreende outros aspetos mais simples como as funções assumidas pelo secretário do diretor de turma ou a importância da elaboração de uma ata. A presença nas reuniões de encarregados de educação permitiu ainda que a professora se confrontasse com a sensibilidade necessária para o contacto com os encarregados de educação, uma vez que poderão existir algumas situações mais delicadas, em que o professor tem de ter alguma sensibilidade para lidar com os assuntos.

Por último, resta apenas referir que o estágio pedagógico, não substituindo toda a experiência que, a partir deste momento, será adquirida, representou um primeiro passo para uma longa caminhada que agora se reafirma com vontade de continuar.

## Parte II

---

### **O raciocínio matemático na realização de demonstrações e na resolução de desafios lógicos**

Um estudo com alunos do 12.º ano do ensino secundário





# **1. Introdução**

O presente trabalho de investigação foi levado a cabo no âmbito do estágio pedagógico e realizou-se numa escola do concelho de Almada, numa turma de 12.º ano, na disciplina de matemática A. Este estudo desenvolveu-se, essencialmente, em duas vertentes. Numa delas é analisado o raciocínio de alunos do 12.º ano na resolução de desafios lógicos [neste estudo entende-se como desafios lógicos problemas que não envolvem, necessariamente, conteúdos do domínio da lógica matemática ou conceitos específicos da matemática escolar, exigindo apenas, para serem resolvidos, conexões lógicas e raciocínios encadeados]. Noutra das vertentes são propostas algumas demonstrações aos alunos com o objetivo de compreender o seu raciocínio matemático, isto é, pretende-se analisar a capacidade que os alunos têm de fazer matemática, ou seja, a capacidade de encontrar padrões, conjecturar, generalizar e justificar. Por fim, pretende-se relacionar as duas vertentes do estudo, verificando a existência, ou não, de alguma relação entre o raciocínio, inerente à resolução de desafios lógicos, e o raciocínio matemático, presente na resolução de demonstrações, que terão um cariz essencialmente algébrico, em particular, envolvendo teoria de números.

O presente estudo está dividido em seis capítulos. Neste capítulo é apresentada uma breve motivação para o estudo do tema, onde se deixa evidente a relevância da compreensão do raciocínio matemático dos alunos para melhorar o seu processo de aprendizagem. Além disto, são ainda apresentados os objetivos sobre os quais se debruça o estudo e as questões orientadoras da investigação.

No capítulo 2 é feita uma revisão de literatura, onde se encontra o suporte teórico para o estudo acima referido, passando em revista os seguintes temas: raciocínio matemático e tipos de raciocínio matemático, processos de raciocínio matemático, sendo em particular abordada a utilização de exemplos e contraexemplos no raciocínio matemático.

No capítulo 3 são justificadas as metodologias e as técnicas de recolha de dados utilizadas, fundamentadas nos objetivos que se pretendem atingir com a investigação.

Nos capítulos 4 e 5 é apresentada a análise de dados, tendo por base os dois estudos de caso realizados. Já no capítulo 6 são apresentadas as conclusões que permitem dar resposta às questões de investigação inicialmente levantadas. Além disto, são ainda apresentadas algumas sugestões para trabalho futuro que poderá vir a desenvolver-se neste âmbito.

## **1.1. Motivação e pertinência do estudo**

Pensar em matemática e não pensar em raciocínio é possivelmente uma tarefa impossível. Efetivamente, o raciocínio é indispensável para a compreensão de qualquer atividade humana, em particular, matemática. É do senso comum, que a própria matemática contribui para desenvolver a capacidade de raciocínio. No entanto, quando questionamos sobre o que é o raciocínio e sobre a forma

como a matemática o permite desenvolver, não parece existir uma resposta clara e unânime na comunidade científica. As questões relacionadas com o raciocínio são efetivamente de complexa discussão. São inúmeros os autores que caracterizam o “raciocínio matemático” de diferentes formas, influenciados pela forma como estes encaram a própria matemática (Saraiva, 2008). Desta maneira, é difícil encontrar uma forma unívoca de definir formalmente este conceito, pelo que se torna essencial explorar o tema tendo como referência os estudos já realizados. No fundo, tal como Steen (1999) afirma “não sabemos o que é, realmente, o raciocínio matemático” (p. 272), mas uma coisa parece evidente: o raciocínio e a matemática estão intrinsecamente relacionados.

Embora tivesse consciência da complexidade que poderia ser o estudo do tema do raciocínio e não soubesse muito bem que rumo tomaria a ‘minha’ investigação, era certa a minha convicção para elaborar um estudo que permitisse analisar a capacidade de raciocínio dos alunos da ‘minha’ turma. Ao refletir sobre a capacidade de raciocínio dos alunos e questionando-me sobre possíveis temas para um trabalho de investigação, rapidamente identifiquei uma atividade que ocupa grande parte do meu tempo: os desafios lógicos.

O meu gosto pelo saber pensar, o raciocinar e o descobrir começou desde cedo com atividades, envolvendo desafios lógicos, fomentadas pelo meu pai e pelo meu avô e com diferentes graus de dificuldade. Recordo-me de passar vários dias, às vezes até semanas, a tentar encontrar resposta para um desafio lógico, construindo várias conjecturas e testando-as durante o processo de resolução. Este processo, nem sempre fácil, mas desafiante, estimulava a minha curiosidade e vontade de resolver mais desafios. Estas atividades eram um hábito bastante enraizado nos encontros de família e que ocupava uma parte significativa desses dias. O meu percurso académico na matemática foi desde cedo definido e influenciado pelas constantes descobertas e aprendizagens que essas experiências me proporcionaram.

Atualmente revejo o processo de resolução desses desafios no trabalho de um matemático. A leitura de um desafio assemelha-se à leitura de um enunciado matemático, seja ele de que área for. A interpretação de um desafio exige um processo de significação dos dados recolhidos semelhante àquela que é necessária ao resolver um problema, seja de otimização, de análise, de estatística, ou outro; o processo de resolução de um desafio carece de fases planeadas e estratégias múltiplas que se vão construindo, tal como um problema real matemático. Os “caminhos sem saída” existem nos desafios lógicos, assim como existem nas demonstrações matemáticas. A frustração de não conseguir resolver um desafio lógico está tão presente como está nos problemas desafiante que os matemáticos encontram. A reformulação de estratégias e o processo de tentativa e erro estão presentes na resolução de desafios e na resolução de problemas matemáticos. A satisfação da resolução de um desafio lógico pode ser tão grande como a de Arquimedes ao dizer “Eureka!”. Várias são as semelhanças encontradas entre os desafios lógicos e o raciocínio matemático. Fica, assim, a certeza da estreita relação entre os desafios lógicos e a atividade matemática.

Desta comunhão, nasce o estudo apresentado, procurando descobrir as diferenças entre o raciocínio dos alunos na resolução de desafios lógicos e na resolução de demonstrações algébricas. Esta

investigação torna-se particularmente desafiante e pertinente, no sentido em que, embora sejam escassos os trabalhos publicados que relacionem as duas vertentes mencionadas, sempre considerei relevante procurar compreender de que forma o desempenho dos alunos em matemática pode ser potenciado com o recurso à resolução de desafios lógicos ou como poderão ser aplicados os desafios lógicos em contexto de sala de aula: serão os desafios lógicos uma via para uma aprendizagem mais desafiante da matemática? Na impossibilidade de dar resposta às múltiplas questões que o tema possa levantar, o estudo irá apenas incidir sobre quatro questões de investigação, servindo assim como uma exploração inicial ao tema e como motor e inspiração para futuros trabalhos e investigações nesta área.

De certo, um passo fundamental para potenciar o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos em sala de aula é compreender como é que estes raciocinam no âmbito desta disciplina. Neste sentido, surge a ideia de compreender e analisar o raciocínio matemático dos alunos para, dessa forma, encontrar possíveis vias para estimular o seu desenvolvimento. Com esta investigação pretende-se, paralelamente aos desafios lógicos, confrontar os alunos com algumas demonstrações matemáticas de índole algébrica, em particular relacionadas com teoria de números, nas quais os alunos tivessem de realizar algumas demonstrações.

A decisão pela teoria de números neste estudo surgiu, por uma questão pessoal, uma vez que sempre foi uma área que me despertou interesse e curiosidade, e também por considerar que este ramo da matemática potencia questões, aparentemente simples, que poderão apresentar diferentes níveis de dificuldade no processo de resolução. A frase “Mathematics is the Queen of the sciences, and the theory of numbers is the Queen of mathematics”<sup>2</sup>, atribuída ao matemático Carl Gauss e que sempre me marcou profundamente traduz a importância desta área da matemática tão vasta e antiga. Por outro lado, a escolha da Álgebra como tema base de um estudo desta natureza pareceu ser, de entre todas, a mais adequada. Não só pela própria relação que a Álgebra tem com o raciocínio matemático e com a lógica, como também pela relevância que esta apresenta na própria matemática. Este trabalho permitiu também partilhar com os alunos algumas das potencialidades da Álgebra, ramo que estes não conhecem ou não valorizam, uma vez que, normalmente, o associam apenas às equações e funções.

## 1.2. Objetivos e questões de investigação

Através do que anteriormente foi descrito, é compreensível questionar se efetivamente existe uma relação entre a resolução dos desafios lógicos e a resolução das demonstrações algébricas. Nesse sentido, o estudo apresentado pretende verificar a possível existência desta relação e, para tal, analisar a forma como se desencadeiam os processos de raciocínio de alunos, do 12.º ano, na resolução de desafios lógicos, bem como na resolução de demonstrações algébricas. Assim, o estudo tem como

---

<sup>2</sup> A matemática é a rainha das ciências e a teoria de números é a rainha da matemática.

principal objetivo compreender de que modo os processos de raciocínio em demonstrações algébricas se distinguem dos utilizados na resolução de desafios lógicos e identificar as principais dificuldades dos alunos nestes processos.

Por forma a cumprir o objetivo traçado, foram construídas algumas questões que deram o rumo necessário à investigação, que tinha como intenção responder às seguintes questões:

1. Que tipo de raciocínio demonstram os alunos durante a resolução de desafios lógicos e de demonstrações algébricas?
2. Quais as maiores dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução de desafios lógicos comparativamente à resolução de demonstrações algébricas?
3. De que forma a utilização de exemplos influencia o raciocínio dos alunos durante a resolução de desafios lógicos ou demonstrações algébricas?
4. Que diferenças são evidenciadas pelos alunos entre a capacidade de resolução de desafios lógicos e a capacidade de resolução de demonstrações algébricas?

Além de pretender com o estudo dar resposta às questões levantadas e ao principal objetivo proposto, pretendo também contribuir para o meu desenvolvimento pessoal e, acima de tudo, profissional, melhorando a minha perceção do raciocínio matemático dos alunos e, com isso, tentar encontrar caminhos para levar ao maior número de alunos a compreensão da matemática.

Embora existam vários estudos, tanto nacionais como internacionais, no âmbito do raciocínio e, em particular, do raciocínio algébrico, a investigação diminui drasticamente quando falamos na relação entre o raciocínio matemático e os desafios lógicos. Nesse sentido, tenho também como objetivo contribuir para o conhecimento da comunidade de educadores e investigadores de educação matemática, desejando deixar algumas contribuições para futuros trabalhos no âmbito da resolução de desafios lógicos e das diferenças entre o raciocínio utilizado nas demonstrações algébricas face aos desafios lógicos. Espero, claro, que, conseqüentemente, consiga encontrar nesta investigação um meio para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, através da resolução de desafios lógicos. Aliado a isto, desejaria descortinar a aplicação da teoria de números no ensino, deixando um caminho aberto para o desenvolvimento desta área no ensino secundário e, quem sabe, também no ensino básico.

## 2. Revisão de Literatura

Neste capítulo, será feita uma análise ao estado da arte, no campo do raciocínio matemático, tendo em vista a discussão de diversos temas, tais como: tipos de raciocínio matemático, processos de raciocínio matemático, o raciocínio matemático no currículo e o seu desenvolvimento. É unanimemente reconhecido que ser capaz de raciocinar é essencial para a compreensão da matemática (NCTM, 2007; Veloso 1998). Assim, sendo o raciocínio um objeto tão importante para o entendimento da matemática, coloca-se a questão do que é o raciocínio matemático. Afinal, o que se quer dizer com *raciocinar matematicamente*?

### 2.1. Raciocínio matemático e tipos de raciocínio matemático

O raciocínio em matemática é de tal forma importante que inúmeros são os trabalhos de investigadores e educadores matemáticos com enfoque neste campo. É interessante verificar que esta também tem sido uma área muito apreciada por psicólogos, pelo que tem sido abordada em muitos estudos. De acordo com Tang e Ginsburg (1999), os psicólogos consideram este tema propício ao desenvolvimento de problemáticas do desenvolvimento cognitivo, como por exemplo: as ideias inatas (ex.: será que os bebés tem um conceito de número?); a inteligência prática (ex.: como é que as pessoas utilizam a matemática nas suas profissões?); as diferenças culturais (ex.: será o desenvolvimento do raciocínio matemático diferente em sociedades letradas e iletradas?); e o pensamento abstrato (ex.: como é que as pessoas compreendem noções, como o infinito?).

Mas será que existem fatores que influenciam o raciocínio matemático além do próprio conhecimento matemático que se tem? Mason, Burton e Stacey (2010) consideram na sua obra que, de facto, existem outros fatores que influenciam a eficácia do raciocínio matemático: i) a competência da utilização dos processos de investigação matemática; ii) a confiança em lidar com determinados estados emocionais e psicológicos; e, por fim, iii) a compreensão da matemática e, em particular, da área que está a ser aplicada.

Afinal, o que será o raciocínio matemático? Apesar de já tantos investigadores e educadores se terem debruçado sobre a temática do raciocínio, parece não existir conformidade para o que se entende por raciocínio matemático, sendo, dessa forma, uma palavra com múltiplos significados. Será visto mais à frente que, enquanto alguns autores salientam sobretudo os aspetos lógicos e dedutivos, outros valorizam mais o processo intuitivo e empírico.

Oliveira (2008) utiliza a expressão *raciocínio matemático* para se referir a “um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)” (p. 3). Por seu lado, Russel (1999) entende que raciocínio matemático é “o que usamos para pensar sobre as propriedades de um determinado objecto matemático e desenvolver generalizações que se apliquem a toda a classe de

objectos - números, operações, objetos geométricos ou um conjunto de dados” (p. 1). Além disso, o autor refere que a “matemática é a disciplina que lida com entidades abstratas e o raciocínio é a ferramenta para compreender a abstração” (p. 1). Dado que vários autores apresentam perspectivas distintas dos vários tipos de raciocínio matemático, pelo que serão analisadas algumas visões de autores distintos.

Numa perspectiva dedutiva, Alisseda (2003) defende que o raciocínio matemático se identifica com a inferência lógica, sendo esta caracterizada pela *certeza* e pela *monocidade*, ou seja, pela existência de uma relação necessária entre as premissas e a conclusão e pela irrefutabilidade das conclusões alcançadas por um raciocínio dedutivo. De forma lógica e matemática, Brousseau e Gibel (2005) definem o raciocínio matemático como sendo uma relação R entre dois elementos A e B tais que: i) A é uma condição ou um facto observável; ii) B é uma consequência, uma decisão ou um facto previsto; e iii) R é uma relação, uma regra ou algo considerado como conhecido ou aceite que leva o aluno, no caso da condição A ser satisfeita ou o facto A ocorrer, a decidir B, prever B ou constatar que B é válido.

Outros autores apontam caminhos pelo campo indutivo, tal como Lannin, Ellis e Elliot (2011), segundo os quais se generaliza a partir de determinados padrões ou características comuns a diversos casos. Estes autores consideram que o raciocínio matemático é “um processo evolutivo de conjecturar, generalizar, investigar o porquê e desenvolver e avaliar argumentos” (p. 10).

O psicólogo americano Sternberg (1999) salienta que o raciocínio matemático requer não só pensamento analítico, mas também pensamento criativo e prático. Na sua perspectiva, alguns processos metacognitivos envolvidos no raciocínio incluem: i) identificação da natureza do problema - não é possível resolver um problema sem primeiro identificar a sua natureza; ii) formulação de uma estratégia para resolver o problema; iii) representação mental da informação sobre o problema - para além da estratégia é importante que os alunos criem uma representação mental na qual a estratégia vai atuar; iv) procura de recursos que levam à solução do problema; e v) monitorização e verificação da solução - é necessário que o trabalho feito seja avaliado, pois muitas vezes os alunos cometem erros por não pensarem se as suas respostas fazem sentido. Na mesma linha, Krulik e Rudnick (1999) focam no seu artigo o pensamento crítico e criativo (*critical thinking* e *creative thinking*), fazendo a distinção entre ambos. O pensamento crítico é aquele que averigua, relata e analisa todos os aspetos da situação ou problema. Este tipo de pensamento inclui a capacidade de ler e analisar a informação de forma crítica, identificando o material supérfluo e o necessário, por forma a construir conclusões pertinentes ou determinar inconsistências ou contradições nos dados. Estes autores acrescentam ainda que este é um pensamento “analítico e reflexivo” (p. 139). Já o pensamento criativo diz respeito a um pensamento original e reflexivo, que “produz um produto complexo” (p. 139), e inclui sintetização de ideias, geração de novas ideias e determinação da sua eficácia. Assim, este é um pensamento que envolve a capacidade de tomar decisões e que, normalmente, conduz à produção de um novo produto final. Os autores referem que os professores devem encontrar regularmente oportunidades para aumentar os dois tipos de pensamento na sala de aula.

Os matemáticos Artzt e Yaloz-Femia (1999) utilizaram os critérios propostos pelo NCTM (1989), por forma a descreverem os comportamentos dos estudantes aquando da resolução de problemas, referindo que o raciocínio matemático é utilizado pelos alunos quando: i) utilizam métodos de tentativa e erro e voltam para trás até encontrar a solução do problema; ii) fazem e testam conjecturas; iii) constroem argumentos dedutivos e indutivos; iv) usam raciocínio lógico-espacial.

Assim, raciocinar matematicamente pode dizer respeito tanto a aspetos lógicos e dedutivos como a processos indutivos. De facto, existem vários autores que distinguem o raciocínio matemático em vários tipos. Oliveira (2002), ao estudar o raciocínio do ponto de vista epistemológico, ou seja, pela sua estrutura formal, identificou quatro grandes tipos de raciocínio: dedutivo, indutivo, abdutivo e transformativo. Dado que, tanto os programas de matemática do ensino básico como do ensino secundário (MEC, 2013) incidem, sobretudo, sobre os dois primeiros tipos de raciocínio, a compreensão das semelhanças e diferenças entre estes poderão constituir um ponto de partida para que uma melhor compreensão do raciocínio e dos seus processos, pelo que serão esmiuçadas as características destes dois tipos de raciocínio daqui em diante.

O raciocínio dedutivo é um tipo de raciocínio formal, baseado em demonstrações dedutivas e lógicas. O raciocínio matemático é, por excelência, o raciocínio dedutivo (Oliveira, 2002; MEC, 2013). Greenes e Findell (1999) consideram que o “processo de dedução envolve raciocinar logicamente, através de afirmações ou premissas generalizadas para conclusões acerca de casos particulares” (p. 128). Estes autores referem ainda que este tipo de raciocínio advém frequentemente da resolução dos alunos a problemas que contêm pistas, nos quais estes têm de construir as conclusões dos dados presentes nas palavras, diagramas, gráficos ou tabelas. Segundo Oliveira (2002), o raciocínio dedutivo é um raciocínio lógico, desenvolvido do geral para o particular, com uma conclusão necessária e com um papel de validação de conhecimento. No fundo, o raciocínio matemático é uma cadeia de deduções lógicas que, desde que estejam isentas de erros, produzirão conclusões necessariamente verdadeiras (Oliveira, 2008). No entanto, tal como afirma Oliveira (2008), a identificação da matemática com o raciocínio dedutivo deixa sem resposta uma questão fundamental - “O que se passa antes de se chegar à demonstração? Por outras palavras, como se chega ao conhecimento novo que posteriormente é organizado de um modo dedutivo?” (p. 4). Este autor afirma que existem muitas investigações que verificam que a atividade matemática está muito além do raciocínio dedutivo.

No que diz respeito ao raciocínio indutivo, os autores Greenes e Findell (1999) referem que este começa a partir da análise de casos particulares, sendo que depois é feita a identificação de relações entre os vários casos e, ainda, a generalização dessas relações. Tipicamente, os problemas que requerem um raciocínio deste tipo pedem aos alunos que determinem “o que vem a seguir?”, por exemplo numa sequência de números ou formas (Greenes & Findell, p. 128). Cañadas e Castro (2007), ao realizarem uma investigação com doze alunos do ensino secundário num contexto de resolução de problemas, propõem uma categorização do raciocínio indutivo dos alunos em sete fases: i) observação de casos particulares; ii) organização de casos particulares; iii) procura de padrões e regularidades; iv) formulação

de conjecturas; v) validação das conjecturas; vi) generalização das conjecturas; e vii) justificação das conjecturas generalizadas. Estes autores puderam verificar que todos os alunos tinham revelado, explicita ou implicitamente, um raciocínio indutivo, pelo que é perceptível a tendência dos alunos raciocinarem de forma mais intuitiva.

George Pólya (1954) defende que os processos de indução começam, muitas das vezes, através da observação, sendo a partir desta que se desenvolvem conjecturas que devem necessariamente ser testadas. O autor faz ainda referência a outros processos relevantes no raciocínio indutivo, nomeadamente a generalização, a especialização e a analogia. A analogia, de acordo com Pólya (1954) e Oliveira (2002), encontra-se intimamente relacionada com a indução. English (1999) diz mesmo que as crianças raciocinam por analogia por forma a compreenderem o mundo à sua volta - por exemplo, as crianças percebem que “as plantas, tal como as pessoas, precisam de comida e água de forma adequada para se manterem vivas” (p. 22), fazendo, então, a analogia com uma situação similar conhecida pelas crianças e adquirida já como verdadeira. Desta forma, a analogia trata-se de uma ferramenta essencial ao raciocínio indutivo. Pólya (1954) defende também que este tipo de raciocínio é essencial para a resolução de problemas, uma vez que permite aos alunos modelarem novos problemas com base em problemas previamente existentes, dando-lhes um caminho para a sua resolução. English (1999) refere que os alunos raciocinam por analogia quando os professores, ou até eles próprios, utilizam representações matemáticas, sejam elas auxiliares, ilustrações, diagramas ou analogias mais abstratas.

Na verdade, embora o raciocínio indutivo possa ser um motor para desencadear descobertas, encontrar padrões e formular conjecturas, é necessário ter em atenção que este não tem, tal como já foi abordado, um carácter formal e de dedução como apresenta o raciocínio dedutivo. Logo no primeiro volume do famoso livro de Pólya (1954, p. 3), *Matemática e raciocínio plausível* (título original *Mathematics and Plausible Reasoning*), é colocado em epígrafe uma citação de Euler que vale a pena reproduzir:

(...) o tipo de conhecimento que se apoia apenas na observação e que ainda não está demonstrado deve ser cuidadosamente distinguido da verdade; é adquirido pela indução, como dizemos habitualmente. No entanto, já encontramos casos em que a mera indução conduz ao erro. Por isso, devemos ter muito cuidado em não aceitar como verdade aquelas propriedades dos números que descobrimos pela observação e que apenas se apoiam na indução. Sem dúvida, devemos usar tal descoberta como uma oportunidade para investigar mais exatamente as propriedades descobertas e para as demonstrar ou refutar; em ambos os casos podemos aprender qualquer coisa de útil. (Euler, Opera Omnia)

A complementaridade entre os raciocínio dedutivo e indutivo também é evidenciada por De Villiers (1999, p.33) :

A falta de êxito na rejeição empírica de conjecturas desempenha, na procura da convicção, um papel tão importante como o processo da justificação dedutiva. Tudo leva a crer que existe uma dimensão lógica, a par de uma psicológica, na obtenção da certeza. Logicamente, exigimos alguma forma de demonstração dedutiva, mas psicologicamente parece que precisamos ao mesmo tempo de alguma experimentação exploratória ou compreensão intuitiva.



Assim, tal como Pólya (1954) reflete na sua obra, embora o raciocínio dedutivo seja fundamental em matemática, o raciocínio indutivo ocupa também um lugar importante, o que justifica a importância da presença de ambos na sala de aula. Para que os alunos se tornem competentes, tanto na utilização do raciocínio dedutivo, como do raciocínio indutivo, o professor deve promover a discussão de conjecturas e afirmações matemáticas na turma (NCTM, 2007).

## 2.2. Processos de raciocínio

O raciocínio matemático, aliado à comunicação e à resolução de problemas, surge como uma capacidade transversal a toda a aprendizagem da matemática (ME, 2007). Este envolve diversos processos, sendo que deve ser dada a oportunidade aos alunos de os conhecerem, nomeadamente, através de atividades que lhes permitam explorar, investigar, representar, conjecturar, explicar e justificar matematicamente, por forma a conseguirem desenvolver o raciocínio matemático (NCTM, 2007). Já diversos autores (Mason, Burton & Stacey, 2010; Oliveira, 2008; Pereira & Ponte, 2013; Russel, 1999; Veloso, 1998) estudaram os processos de raciocínio e, embora não haja uniformidade na conceção deste conceito, existe normalmente uma interseção entre a posição destes relativamente aos processos já mencionados.

Russel (1999) afirma que o raciocínio matemático é essencialmente o desenvolvimento, justificação e uso de generalizações matemáticas. De acordo com Pereira e Ponte (2013), “o raciocínio matemático inclui diversos processos, tais como formular questões, formular e testar conjecturas (incluindo generalizações) e realizar justificações” (p.19). Mason, Burton e Stacey (2010) também fazem a distinção entre quatro processos fundamentais no raciocínio matemático, nomeadamente, a especialização, a formulação de conjecturas, o teste e a justificação. De notar que o processo de especialização consiste na exploração de casos particulares e/ou na procura de regularidades, que comumente é referida como a exploração de exemplos. No subcapítulo 2.3. será dada particular atenção a esta questão.

### 2.2.1. Conjeturar e Generalizar

De acordo com o NCTM (2007), a descoberta é essencial à prática da matemática. Assim, a conjectura enquanto suposição informada, constitui uma importante via para a descoberta. De acordo com MEC (2013) “os alunos devem ser capazes de estabelecer conjecturas, em alguns casos, após a análise de um conjunto de situações particulares, nomeadamente pela exploração das potencialidades dos recursos tecnológicos” (p. 6), pelo que é bastante importante o papel do professor no desafio constante aos alunos em conjecturar e demonstrar. Dada a relevância deste processo, é bastante pertinente compreender que tipos de raciocínios estão envolvidos nos processos de conjectura e demonstração e de que forma é possível desenvolvê-los.

A formulação de conjecturas utiliza, essencialmente, um raciocínio indutivo, que pode basear-se na observação direta de dados, na manipulação dos mesmos, na analogia com outras conjecturas, entre outras formas (Ponte, Brocado & Oliveira, 2003). Segundo Lannin, Ellis e Elliot (2011) conjecturar consiste em raciocinar sobre as relações matemáticas para desenvolver afirmações que têm o intuito de ser verdadeiras, mas que não se conhecem como tal. Tal como afirmam Mason, Burton e Stacey (2010) a maioria das conjecturas em matemática são falsas e são rapidamente encontrados contraexemplos. No entanto, a conjectura em pequena escala encontra-se no centro do raciocínio matemático. Estes autores representam a conjectura como um processo cíclico, tal como se apresenta na figura seguinte (Figura 9). Ao considerar alguma propriedade como verdadeira, constitui-se uma conjectura sobre isso que, geralmente, começa com um sentimento de dúvida à procura de uma resposta. Depois disso, faz-se uma investigação para tentar compreender a validade da conjectura levantada. Se for considerada falsa é retificada ou, até mesmo, abandonada. Se puder ser justificada, então torna-se verdadeira e poderá ser utilizada em qualquer circunstância.

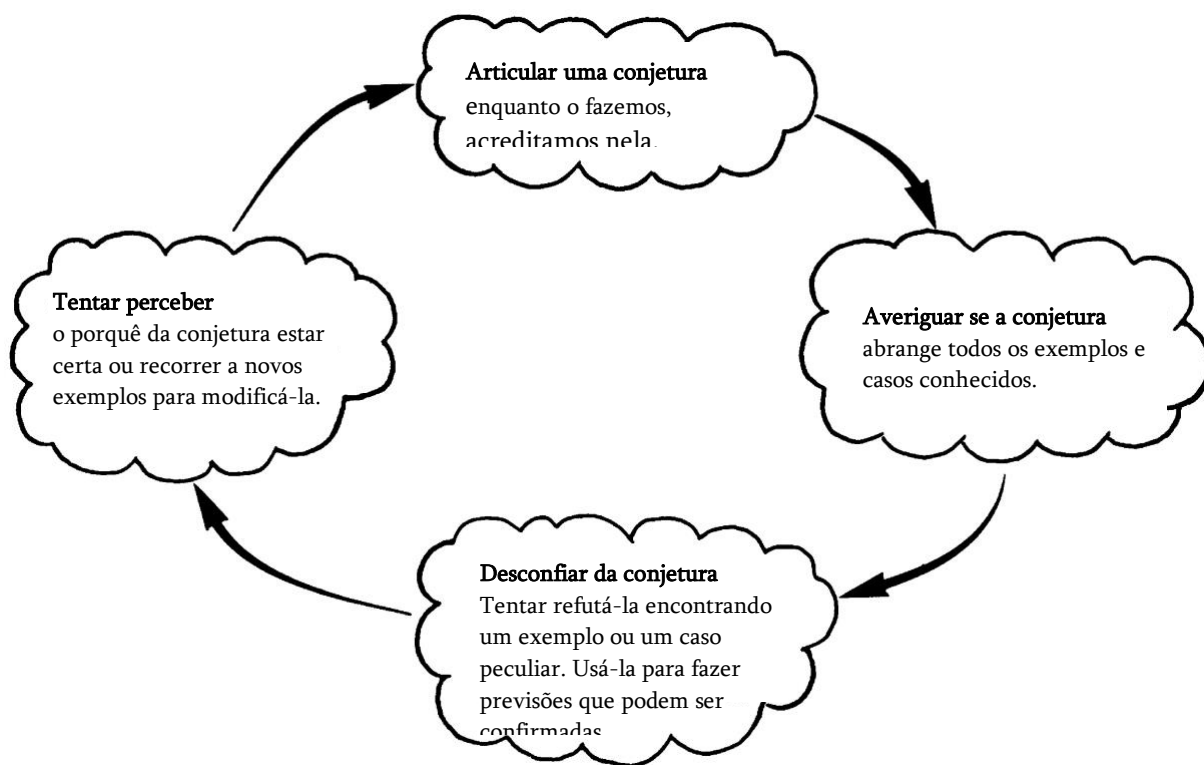


Figura 9: Diferentes fases do processo de construção de uma conjectura de acordo com Mason, Burton e Stacey (2010, p. 59).

Pólya (1954), tal como já mencionado, considera alguns processos relevantes no raciocínio indutivo, nomeadamente a generalização, a especialização e a analogia. Relativamente à generalização, o autor define-a como a passagem de uma consideração “acerca de um certo número de objetos para um número maior de objetos contendo os anteriores” (p. 13), que, de certa forma, se opõe à especialização,

sendo a especialização uma passagem de uma consideração “acerca de um certo número de objetos para um determinado objeto contido no conjunto anterior” (p. 13).

A generalização, enquanto conjectura com características particulares, tem um papel essencial na compreensão da matemática, pois este processo de raciocínio é uma das bases da construção da matemática enquanto ciência. Formular uma generalização matemática envolve uma afirmação sobre uma propriedade, conceito ou procedimento que se pretende válido para um conjunto alargado de objetos ou condições matemáticas.

Na formulação de generalizações, Galbraith (1995) faz a distinção entre alunos que seguem uma abordagem empírica e os que optam por uma abordagem dedutiva. Relativamente aos que seguem uma abordagem empírica, isto é, que testam alguns casos particulares, o autor considera dois casos: os que fazem testes de modo arbitrário e aqueles que escolhem os casos tendo como referência a conjectura que está a ser testada. O autor refere ainda que os alunos que seguem a via dedutiva, enfrentam três fases. A primeira passa por reconhecer a relevância de um certo princípio externo, a segunda implica reconhecer o modo como o princípio é útil e a terceira consiste em aplicar o princípio apropriadamente.

Tal como refere Pereira (2012), Radford (2003) considera três grupos de generalizações: i) as factuais, que surgem da aplicação direta de dados particulares ou empíricos a novos casos particulares, não havendo alteração do conjunto de objetos matemáticos; ii) as contextuais, que decorrem da extensão dos dados empíricos a um novo conjunto de objetos matemáticos; e iii) as simbólicas, que envolvem a compreensão e utilização da linguagem algébrica. Tal como refere esta autora, a “generalização simbólica é aquela que envolve na sua formulação a compreensão e utilização da linguagem algébrica” (p. 13). Embora exista uma tendência natural do ser humano para a generalização, pelo que, em particular, os alunos estão naturalmente predispostos a realizar generalizações (Becker & Rivera, 2005), formular uma generalização matemática pertinente representa uma tarefa desafiante (Zazkis, Liljedahl & Chernoff, 2008). Deste modo, é aconselhado que primeiramente os alunos “aprenderam a formular generalizações matemáticas em tarefas nas quais têm a possibilidade de observar padrões e relações. Gradualmente, devem formular generalizações utilizando a notação algébrica para que posteriormente lhes seja possível obter novas informações ao refletirem sobre as expressões algébricas produzidas por outrem ou pelos próprios” (Carraher, Martinez, & Schliemann, 2008, p. 20). Em concordância com esta ideia, também Pereira e Ponte (2013) referem que é necessário que seja promovida e compreendida a transição entre generalizações baseadas maioritariamente em casos particulares e observações empíricas e generalizações baseadas em propriedades ou conceitos matemáticos.

### 2.2.2. Justificar e Demonstrar

De acordo com o NCTM (2007), uma demonstração é um argumento deduzido de forma rigorosa e lógica a partir de hipóteses iniciais. A demonstração, apoiada em procedimentos, propriedades e definições matemáticas, é central enquanto processo de raciocínio matemático (Pereira & Ponte, 2013).

Aliás, tal como refere o NCTM (2007) “uma demonstração matemática é um modo formal de exprimir determinados tipos de raciocínio e justificação” (p. 61). Ao encontro das palavras de Ponte e Sousa (2010), uma demonstração envolve “a formulação de uma estratégia geral de demonstração” e “a construção de uma cadeia argumentativa (formulação de passos justificados que levam à conclusão)” (p. 32). Do exposto, compreende-se a importância que a demonstração apresenta no raciocínio matemático, pelo que vários educadores e investigadores já se debruçaram sobre este tema. Assim, serão apresentadas em seguida algumas perspetivas relativamente aos processos de justificação e demonstração no raciocínio matemático e, em particular, no ensino da matemática.

A diferença entre a justificação e a demonstração é ténue, sendo que, nas palavras de Rodrigues (2009, p. 39) “quando uma justificação é geral e encerra um raciocínio dedutivo, esta justificação já se pode considerar uma demonstração”. Assim, a justificação é, como menciona esta autora, uma precursora da demonstração, uma vez que os alunos começam por se apoiar em casos particulares e evoluem para justificações cada vez mais gerais, até chegarem às demonstrações.

De acordo com a visão de Veloso (1998), embora muitas vezes seja defendido que os alunos devam “fazer demonstrações” para aprender a raciocinar, não é necessário ter frequentado a escola e ter feito demonstrações na disciplina de matemática para saber, de facto, raciocinar. No entanto, este autor acredita que,

a prática frequente pelos alunos da argumentação, da justificação das próprias afirmações e da procura de uma explicação em defesa das próprias afirmações e da procura de uma explicação em defesa das conjecturas que formulam, no decorrer de atividades de investigação constituem modos válidos para melhorar o seu discurso matemático e as formas de exprimir os seus raciocínios. (p. 360).

Neste sentido, o autor refere que as demonstrações, e o raciocínio dedutivo, em geral, não devem ser considerados como uma via para desenvolver o raciocínio matemático, mas sim como um dos próprios objetivos do ensino de matemática, ou seja, se um dos principais objetivos da matemática é permitir que os alunos compreendam o que é a matemática, é imprescindível que estes “experimentem e interiorizem o carácter distintivo da matemática como ciência, ou seja a natureza do raciocínio dedutivo e mesmo a estrutura axiomática das suas teorias” (Veloso, 1998, p. 361).

Desde as suas primeiras experiências no campo da matemática, é importante ajudar as crianças a compreenderem que as afirmações deverão ser sempre justificadas. Questões como “por que é que pensas que isto é verdade?” e “alguém aqui acha que a resposta é diferente, e porquê?” ajudam-nas a compreender que as afirmações necessitam de ser suportadas ou refutadas pelas evidências. (NCTM, 2007, p. 61)

De acordo com Veloso (1998), no contexto matemático, uma generalização, muitas vezes denominada teorema, é considerada válida apenas se demonstrável. No entanto, no âmbito da educação matemática, a validade de uma generalização deve ser considerada de acordo com as capacidades, conhecimento e competências dos alunos, pois, tal como os alunos encontram dificuldades quando têm de fazer demonstrações, também os professores se deparam com um enorme desafio durante o processo

de demonstração. Tal como refere o autor, os professores têm de compreender quando é que o argumento ou a justificação de um aluno se pode, ou não, considerar uma demonstração. Uma justificação em que se analise todos os exemplos conhecidos poderá constituir uma justificação plausível, mas, para o autor, não se trata de uma demonstração. Tal como referido por Pereira e Ponte (2013) os alunos não dão relevância às características das justificações necessárias para que sejam matematicamente válidas, sendo que por vezes apresentam justificações não válidas. De acordo com Lannin (2005), é importante que os alunos compreendam a importância das justificações matematicamente corretas. Para tal, Veloso (1998) recomenda que as demonstrações decorram da atividade dos alunos, por exemplo, a demonstração de conjecturas por eles formuladas.

“Em princípio, os alunos devem ser solicitados a argumentar em defesa das suas próprias conjecturas e, eventualmente, a demonstrá-las. De uma maneira simplista, podemos dizer que “quem afirma é quem demonstra!”. Na realidade, existe uma muito maior motivação para demonstrar os resultados próprios que os alheios e a demonstração adquire desta forma outro significado e valor.” (Veloso, 1998, p. 373)

Veloso (1998) agrupa as justificações em cinco níveis de complexidade: i) não justificar; ii) apelar à autoridade externa; iii) utilizar evidência empírica; iv) utilizar um exemplo genérico; e v) justificar dedutivamente. Sem dúvida, é curiosa a forma como Mason, Burton e Stacey (2010) propõem a elaboração de um argumento convincente: convencer-se a si próprio, convencer um amigo e convencer um inimigo. Evidentemente, o primeiro é simples. O segundo prende-se com a necessidade de articular e exteriorizar aquilo que à partida, para o próprio, pode parecer óbvio, mas que deve parecer verdadeiro também para o seu amigo. No entanto, não basta tentar convencer uma pessoa que, à partida, não duvide daquilo que seja dito, tal como um amigo normalmente faz, é preciso convencer alguém que duvide de qualquer afirmação que seja feita, como um inimigo o fará.

Os alunos apresentam uma certa tendência para considerar as conjecturas válidas apenas a partir da verificação de um número reduzido de casos, tal como defendem Ponte, Brocado e Oliveira (2003). Estes autores defendem que este fenómeno acontece pelo facto de não haver nos currículos destaque para as demonstrações. Knuth (2002) refere que nas escolas secundárias (dos EUA) a demonstração é praticamente inexistente no currículo, sendo apenas frequente na Geometria. A inversão desta “tendência” obrigaria a uma visão diferente por parte dos professores, para que estes entendessem a natureza e o papel da demonstração, e por parte dos alunos, para que estes também olhassem para as demonstrações com menos relutância e desdém, pois estes normalmente associam a demonstração a algo difícil (Balacheff, 1991; Chazan, 1993).

Na verdade, embora a justificação e demonstração de resultados possa ser uma das formas de levar os alunos a acreditar na matemática (NCTM, 2007; Santos, 2011), estes normalmente apresentam alguma resistência à sua prática, que poderá advir do facto de o contacto dos estudantes com a demonstração acontecer apenas quando se pretende demonstrar algo que estes já sabem que está demonstrado e é conhecido (De Villiers, 1999). Variadas vezes se ouve os alunos questionar “porque é

que temos que demonstrar isto?” (De Villiers, 1999, p. 1), principalmente quando os teoremas apresentam uma justificação intuitiva ou uma dedução empírica, como é o caso, por exemplo, de alguns teoremas de geometria. No fundo, os alunos veem a demonstração apenas como forma de confirmar algo que já se sabe que é verdadeiro (Knuth, 2002). Esta ideia, efetivamente, distorce em grande parte o fundamento de uma demonstração.

Segundo o NCTM (2007), “os alunos poderão não ter sempre os conhecimentos e as ferramentas necessárias para encontrar uma justificação que apoie uma conjectura ou um contraexemplo que a refute” (p. 63), por isso, cabe ao professor guiar os alunos nesta contínua descoberta, aguçar a curiosidade e incutir a necessidade de justificar todas as afirmações que se façam. Neste sentido, o NCTM (2007) propõe que, para ajudar os alunos a desenvolver e justificar conjecturas mais gerais, e também para refutar, os professores poderão perguntar: “Isto resulta sempre? Algumas vezes? Nunca? Porquê?” (p. 63).

A dificuldade dos alunos em compreender a necessidade da demonstração é bastante conhecida entre os professores do ensino secundário, pelo que será importante analisar as diferentes funções de uma demonstração para um melhor entendimento desta problemática. O matemático De Villiers (1999) apresentou no seu artigo um modelo que explica as diferentes funções que uma demonstração pode apresentar. Assim, na perspetiva deste autor, a demonstração pode ser vista como:

- i) Processo de verificação/convencimento. Na maioria dos casos, os professores de matemática acreditam na demonstração como a única autoridade para validação de uma conjectura. No entanto, o autor salienta que a demonstração não é vista como um requisito para a convicção, mas é, antes, a convicção encarada como um pré-requisito para a procura de uma demonstração. Por outras palavras, quando a convicção anterior à demonstração é o motor para a demonstração, a função da demonstração não se prende propriamente com uma verificação/ convencimento, uma vez que “um alto grau de convicção pode ser algumas vezes atingido mesmo na ausência de uma demonstração” (p. 32). Por exemplo, embora ainda não tenha sido descoberta a demonstração para a Conjetura de Goldbach<sup>3</sup>, a comunidade matemática está convencida da sua validade, pois ainda não foi encontrado um único contraexemplo que contrarie a propriedade, mas, evidentemente, nada garante que esta seja, de facto, verdadeira.
- ii) Processo de explicação. Quando os resultados em questão são evidentes, quer pela intuição quer pela experiência empírica, a função da demonstração deixa de ser a verificação e passa a ser a explicação. Para muitos matemáticos o aspeto da explicação de uma demonstração tem mais importância que o da verificação. Tal como o autor referencia, o matemático Paul

---

<sup>3</sup> O matemático Christian Goldbach propôs, numa carta escrita a Leonhard Euler, em 1742, aquela que é hoje conhecida como a conjectura de Goldbach. Esta afirma que todo o número par maior que 2 pode ser representado como a soma de dois números primos.

Halmos afirmou que embora a demonstração computacional do teorema das quatro cores possa convencê-lo da sua veracidade, pessoalmente preferia uma demonstração que facilitasse a “compreensão”.

- iii) Processo de descoberta. Existem imensos exemplos na história da matemática de novos resultados que foram descobertos ou investidos por processos exclusivamente dedutivos. No entanto, a título exemplificativo, o autor refere que as geometrias não-euclidianas provavelmente não poderiam ter sido encontradas por mera intuição. Assim, os processos dedutivos e, em particular, a demonstração podem, muitas vezes ser o caminho para a exploração, descoberta e invenção de novos resultados.
- iv) Processo de sistematização. A demonstração apresenta-se como uma ferramenta indispensável para transformar um conjunto de resultados conhecidos num sistema dedutivo de axiomas, definições e teoremas, que revela relações lógicas entre afirmações de um modo que a intuição dificilmente permite satisfazer. Além disto, a demonstração permite, por exemplo, “identificar inconsistências e argumentos circulares” (p. 34) ou simplificar “as teorias matemáticas ao integrar e ligar entre si afirmações, teoremas e conceitos não relacionados” (p. 34).
- v) Meio de comunicação. A demonstração é um meio de comunicar resultados matemáticos não só entre matemáticos “profissionais” como também entre professores e alunos e entre os próprios alunos. Diversos autores já abordaram a demonstração como um momento de debate crítico ou uma forma de interação social, que envolve “uma negociação subjetiva não apenas dos significados dos conceitos em jogo, mas também implicitamente dos critérios relativos ao que é um argumento aceitável” (p. 35), o que leva, muitas vezes à identificação de erros, à descoberta de um contraexemplo e ao seu refinamento.
- vi) Desafio intelectual. As demonstrações podem atingir um nível de gratificação e realização pessoal tão elevado como aquele que algumas pessoas sentem ao fazer um *puzzle* ou correr uma maratona. Assim, a tentativa de demonstração de um resultado pode revelar-se uma atividade bastante apelativa e desafiante que potencie e teste a “energia intelectual e o engenho matemático” (p. 35).

Por fim, o autor realça que as funções apresentadas não se excluem mutuamente, pelo que podem surgir em simultâneo, nem preenchem todas as possibilidades, apontando como alguns exemplos a função estética, de memorização ou de desenvolvimento algorítmico que uma demonstração pode apresentar.

## 2.3. Demonstração, exemplos e contraexemplos

A especialização é um processo do raciocínio de extrema importância e já diversos autores se preocuparam em defini-lo (Pólya, 1954; Mason, Burton & Stacey, 2010). Na verdade, a especialização

consiste na exploração de casos particulares ou na procura de regularidades. Dada a natureza deste estudo, pareceu totalmente pertinente a inclusão e enfoque na revisão de literatura de um ponto relativo a exemplos e contraexemplos. Por simplicidade de escrita, e uma vez que poderemos considerar os contraexemplos como um caso particular dos exemplos, referir-se-á apenas a exemplos.

Os exemplos têm desempenhado um papel cada mais preponderante no processo de ensino e aprendizagem da matemática e, por esse motivo, diversos são os investigadores focados nesta temática (por exemplo, Knuth, 2002; Peled & Zaslavsky, 1997). Ko e Knuth (2013) acreditam que a validação de demonstrações e a utilização de contraexemplos é uma prática essencial para o desenvolvimento do raciocínio e do conhecimento matemático. Em concordância, Knuth, Zaslavsky e Ellis (2017) consideram que o raciocínio baseado em exemplos é um importante objeto de estudo e acreditam que os exemplos têm um papel “essencial no desenvolvimento, exploração e compreensão de conjecturas, bem como em tentativas subsequentes de desenvolver demonstrações dessas conjecturas” (p. 2).

Antonini (2006) considerou que “a construção de exemplos é uma atividade da resolução de problemas” (p. 62) e identificou três tipos de estratégias para a produção de exemplos no estudo que realizou, com licenciados em matemática, nomeadamente: *tentativa e erro* – foi a mais comum e consiste em produzir exemplos que satisfazem determinados critérios e aos quais se vão alargando as características e se testam sucessivamente para conferir se satisfaziam os critérios exigidos; *transformação* – também é um processo utilizado por vários alunos, e consiste na modificação dos exemplos que já satisfazem algumas propriedades até verificar as restantes; e *análise* – este processo, que apenas é utilizado quando os anteriores se demonstram ineficazes, consiste em considerar que o objeto pretendido já existe e, a partir dessa premissa, deduzir outras propriedades necessárias até obter o objeto inicialmente considerado e verificar que ele efetivamente existe.

Balacheff (1991) realizou uma investigação com pares de alunos de 13-14 anos, em que estes tinham de encontrar formas de calcular as diagonais de um polígono. Neste estudo, o investigador apenas intervinha quando os alunos apresentavam uma solução, à qual o investigador, se necessário, dava contraexemplos para a forma de calcular identificada pelos alunos. Foram identificados vários tipos de abordagens dos alunos para superar o problema levantado pelos contraexemplos, das quais o autor realça duas: a modificação das conjecturas e a consideração dos contraexemplos como exceções. O autor concluiu o seu estudo, definindo os três principais fatores que determinam a escolha dos alunos ao analisar um contraexemplo: o problema em si, uma conceção global do que consiste o conteúdo matemático, a situação e o tipo de conjectura.

A questão da validação de um argumento também é muito pertinente e já vários autores direcionaram a sua investigação nesse sentido. Ko e Knuth (2013) no seu estudo fazem referência a Weber (2010) para definir as principais estratégias utilizadas para validar argumentos de uma demonstração: i) raciocínio formal e construção rigorosa de demonstrações – começa-se a verificar as suposições ou os métodos que são utilizados no argumento (por exemplo, demonstração direta, contra recíproco, etc.), antes de se fazer a verificação de toda a demonstração; ii) raciocínio dedutivo informal



– justifica-se a verdade ou a falsidade de cada afirmação do argumento usando explicações intuitivas ou informais com base em propriedades que não se podem deduzir de forma rigorosa; e iii) raciocínio baseado em exemplos – utilização de um ou mais exemplos para determinar a verdade de uma afirmação apresentada num argumento.

Vários investigadores têm analisado as dificuldades dos alunos do ensino básico e secundário em lidar com questões de demonstrações que envolvem exemplos e contraexemplos (Peled & Zaslavsky, 1997; Knuth, 2002). Também a compreensão matemática dos professores e estudantes universitários de matemática sobre o que estes consideram justificações aceitáveis tem sido alvo de atenção (Knuth, 2002; Weber, 2010). Na verdade, o conhecimento do conteúdo por parte dos professores e a capacidade de validação das demonstrações dos alunos têm um impacto significativo no desenvolvimento da demonstração em sala de aula e, conseqüentemente, na relação dos alunos com atividades desta natureza (Bieda, 2010; Stylianides, 2007).

Selden e Selden (2003) referem no seu estudo que alguns alunos tendem a concentrar-se em erros superficiais, como expressões algébricas e manipulações simbólicas, ao invés de erros mais gerais, como demonstrar o contrário de uma afirmação e as principais lacunas nos argumentos dados. De acordo com Knuth, Zaslavsky e Ellis (2017), é habitualmente aceite que as justificações dos alunos progridam de argumentos empíricos (baseados em exemplos) para demonstrações. De facto, segundo estes autores, é uma grande dificuldade para muitos alunos concretizar com sucesso esta passagem do raciocínio indutivo para o dedutivo. A relação dos alunos com os exemplos e, em particular, a sua excessiva confiança nestes como meio de justificação, é uma das principais razões para as dificuldades desta transição, pelo que é necessário que estes aprendam a limitação do exemplo e a necessidade da demonstração. Estes autores citam Epstein e Levy (1995) no seu trabalho, referindo que “é provável que os avanços mais significativos na matemática tenham surgido da experimentação com exemplos” (p.6), o que acontece, por exemplo, nas geometrias não-euclidianas.

Na verdade, embora a utilização de exemplos seja muito comum no trabalho de um matemático, tal como os autores referem, esta não apresenta o mesmo papel que aquele que tipicamente se desenvolve na sala de aula com os alunos. Na verdade, os alunos não sabem exatamente como analisar exemplos ou como pensar estrategicamente em contraexemplos, pelo que “o exemplo” não apresenta para eles toda a potencialidade que poderia.

No entanto, nem todos os estudos verificam que o ensino através de exemplos criados pelos alunos possa ser a ferramenta pedagógica mais viável, como é o caso do estudo levado a cabo por Iannone, Mejía-Ramos e Simpson (2011). Estes investigadores entrevistaram estudantes universitários, em cursos de matemática ou com uma forte componente nesta disciplina, com o objetivo de analisar os benefícios pedagógicos de pedir aos alunos que gerassem os seus próprios exemplos quando confrontados com algumas conjecturas. Para tal, numa primeira fase, os alunos foram confrontados com alguns exemplos já determinados e referidos no enunciado. Noutra fase, apenas lhes foi dado o enunciado da tarefa, sem indicação de qualquer exemplo. A investigação referida não sustentou a ideia

de que gerar os próprios exemplos pudesse beneficiar a realização de demonstrações, pois não encontrou diferenças significativas entre o sucesso na demonstração dos que geravam exemplos em comparação com aqueles que estudaram exemplos sugeridos. Iannone et al. (2011) realçam que, de acordo com o estudo, a utilização de exemplos não é prejudicar enquanto técnica pedagógica para aumentar o entendimento de conceitos matemáticos, simplesmente não melhora substancialmente as competências para elaborar demonstrações quando comparada com a técnica de fornecer logo à partida aos alunos alguns exemplos.

## 2.4. O raciocínio matemático no currículo

Atualmente, os professores de 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário encontram-se sob a orientação de dois documentos reguladores, o novo *Programa de matemática A do ensino secundário* – PMES (2014) e o novo *Programa de matemática do ensino básico* – PMEB (2013). Tanto no PMEB como no PMES, são descritas algumas finalidades para o ensino da matemática, entre as quais se encontra a estruturação do pensamento e, no caso particular do PMES, o desenvolvimento do raciocínio abstrato. Ao nível do ensino básico, a estruturação do pensamento apresenta como foco a apreensão e hierarquização de conceitos matemáticos, o estudo sistemático das suas propriedades e a argumentação clara e precisa, própria da disciplina de matemática, que apresenta como principal papel a organização do pensamento, característica essencial do raciocínio hipotético-dedutivo. Pretende-se, com isto, contribuir para a “capacidade de elaborar análises objetivas, coerentes e comunicáveis” e, ainda, “melhorar a capacidade de argumentar, de justificar adequadamente uma dada posição e de detetar falácias e raciocínios falsos em geral” (MEC, 2013, p. 2). Alicerçado a estas características, no ensino secundário, pretende-se que o desenvolvimento do raciocínio abstrato seja considerado como uma finalidade em si, assumindo-se como uma capacidade indispensável a um bom percurso escolar ou profissional, em qualquer área do conhecimento (MEC, 2013).

Tanto no PMEB como no PMES, os objetivos que traduzem os desempenhos fundamentais que os alunos devem mostrar ao longo do ensino secundário são explicitados através de verbos, a que são atribuídos significados específicos, tais como: identificar, reconhecer, saber, demonstrar, justificar. De forma integrada, entre outras potencialidades, estes desempenhos contribuem para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Segundo MEC (2013), embora o raciocínio matemático seja por excelência o raciocínio hipotético-dedutivo, o raciocínio indutivo também ocupa um lugar muito importante na atividade matemática, uma vez que incita à formulação de conjecturas.

Segundo o PMES, com o cumprimento dos descritores previstos no programa de matemática A, os alunos conseguirão elaborar algumas demonstrações com segurança. Já no final do 3.º ciclo, de acordo com o PMEB, os alunos devem ser capazes de elaborar, com algum rigor, pequenas demonstrações.

A questão que se pode colocar é a seguinte: Será possível desenvolver o raciocínio matemático dos alunos? Se sim, de que forma se pode fazê-lo? De acordo com Oliveira (2008), o raciocínio

matemático envolve processos mentais tão complexos, nos quais intervêm elementos de natureza lógica, matemática, epistemológica, biológica, psicológica e até emocional, pelo que, de facto, não é possível saber como se desenvolve o raciocínio matemático. Tal como já referido, Steen (1999) considera que não se sabe concretamente o que é o raciocínio matemático. Neste sentido, o autor afirma que também não é possível saber como desenvolvê-lo, mas existem estratégias como “pensar o que se está a fazer” e “porque se está a fazer” (p. 273) que contribuem para o sucesso dos estudantes. Já Ponte e Sousa (2010) afirmam que “aprende-se a raciocinar raciocinando e analisando os raciocínios realizados por nós e pelos outros” (p. 32). Na mesma linha, o NCTM (2007) refere que, o raciocínio matemático é um hábito mental e, tal como todos os hábitos, deve ser desenvolvido através da sua utilização consistente e variada. Krulik e Rudnick (1999) referem que existem duas filosofias relativamente ao desenvolvimento das habilidades de raciocínio dos alunos: separar o raciocínio numa disciplina à parte ou incorporar as atividades de raciocínio no currículo diário. Para estes autores, “as habilidades de raciocínio devem ser desenvolvidas com, e como parte de, o contínuo das aulas de matemática” (p. 138).

Finalmente, a alta motivação e perseverança dos matemáticos não é comum nos alunos. A frustração e o desapontamento em razão dos falhanços podem ter um efeito devastador na sua auto-estima, inibindo a sua capacidade de raciocinar matematicamente ou o seu desejo de o fazer. Por isso, um ambiente de sala de aula em que se experimenta e se erra, e se volta a tentar, no fundo, um ambiente em que se replica o trabalho habitual do matemático, sem punições psicológicas, é um grande estímulo para o desenvolvimento do raciocínio matemático. (Oliveira, 2008, p.8)

No fundo, para que haja um desenvolvimento produtivo do raciocínio matemático dos alunos, é fundamental o papel dos professores. Martin (2009) apresenta algumas propostas para que os professores estimulem os alunos a raciocinar, nomeadamente: fornecer tarefas que exijam que os alunos descubram coisas por eles próprios; pedir aos alunos que expliquem os problemas por palavras suas, incluindo as suas considerações sobre o problema; dar tempo aos estudantes para que estes analisem o problema intuitivamente, explorando-o através de modelos e, posteriormente, fazerem uma abordagem mais formal; resistir à vontade de dar a solução aos alunos quando estes estão frustrados ao não saber responder, tentando encontrar uma maneira de os ajudar a pensar; proporcionar tempo de espera depois de uma questão aos alunos, por forma a que estes consigam formular o seu próprio raciocínio; estabelecer um clima de sala de aula favorável à partilha dos próprios argumentos e à crítica produtiva dos argumentos dos colegas; entre outros.

O desenvolvimento do raciocínio matemático constitui uma dificuldade na gestão curricular para professores e educadores. Um dos principais desafios que o professor enfrenta prende-se com o tempo para trabalhar de forma integrada as capacidades transversais, tal como refere Rodrigues (2009). Segundo esta autora, “o aumento da carga horária de matemática pode atenuar o problema mas não o resolverá” (p. 40), sendo antes necessário gerir o currículo de uma forma integrada e conectada e não compartimentada. Oliveira (2008) chama a atenção para a necessidade de não se precipitar o desenvolvimento do raciocínio matemático, pois é importante o “período experimental na resolução de

uma tarefa” (p. 8). Assim, segundo o autor, os momentos de teste de conjeturas e de tentativas de encontrar contraexemplos são essenciais ao desenvolvimento do raciocínio matemático.

### 3. Metodologia

No presente capítulo, para além de ser feita uma abordagem bibliográfica da investigação qualitativa em educação, do ponto de vista teórico, são, ainda, apresentadas as opções metodológicas efetuadas no presente estudo, assim como descritos os procedimentos realizados na recolha e análise de dados. Além disto, são explicitados os critérios de escolha dos participantes na investigação e, por fim, são enunciados tanto os desafios lógicos propostos aos alunos como as demonstrações algébricas, assim como as respetivas (possíveis) resoluções. Por fim, são apresentados aspetos de natureza ética respeitados no estudo realizado.

#### 3.1. Investigação qualitativa

Bogdan e Biklen (1994) definem “investigação qualitativa” como “um termo genérico que agrupa diversas estratégias de investigação que partilham determinadas características” (p.16). Em educação, a investigação qualitativa é frequentemente designada por *naturalista* uma vez que o investigador frequenta os locais em que os fenómenos, nos quais está interessado, se verificam naturalmente. Os dados recolhidos são denominados *qualitativos*, o que se traduz numa riqueza dos mesmos a nível de pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas. Em investigações desta natureza os dados são recolhidos normalmente através de um contacto profundo com os indivíduos em contexto natural. Nas palavras de Bogdan e Biklen (1994) “o investigador introduz-se no mundo das pessoas que pretende estudar, tenta conhecê-las, dar-se a conhecer e ganhar a sua confiança” (p. 16). Nesse sentido, não se dá particular atenção a causas exteriores, mas antes privilegia-se a compreensão dos comportamentos dos sujeitos da investigação, partindo da sua perspetiva e tentando compreendê-la.

Meirinhos e Osório (2010), com base na obra de Stake (1999), referem três importantes diferenças entre as perspetivas qualitativas e quantitativas da investigação. A primeira distinção diz respeito ao conhecimento que se pretende atingir, ou seja, enquanto que na investigação quantitativa se destaca a explicação e o controlo, desejando-se o surgimento de uma relação causa-efeito por forma a estabelecer generalizações aplicáveis a diversas situações, na investigação qualitativa pretende-se compreender as inter-relações que acontecem na vida real. A segunda diferença reside na função pessoal e impessoal do investigador, isto é, se por um lado um investigador quantitativo limita a sua função de interpretação pessoal durante todo o processo, desde o desenho da investigação até à análise estatística, o investigador qualitativo faz observações, emite juízos de valor e analisa durante todo o processo, nunca devendo perder o contacto com o desenvolvimento do acontecimento. Por fim, a terceira distinção diz respeito ao conhecimento descoberto e construído - enquanto que na investigação quantitativa há a pretensão da descoberta de conhecimento, tentando-se procurar a lógica da descoberta, a investigação qualitativa procura a lógica da construção do conhecimento.

Bogdan e Biklen (1994) caracterizam a investigação qualitativa através de cinco aspetos basilares:

- i) os dados são recolhidos no ambiente natural do objeto de estudo, sendo o investigador o instrumento principal na recolha desses dados: os investigadores que utilizam uma investigação qualitativa frequentam os locais de estudo, uma vez que se preocupam com o contexto, ou seja, entendem que as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência;
- ii) a investigação qualitativa é descritiva: os dados recolhidos são analisados com toda a sua riqueza, respeitando tanto quanto possível, a forma em que estes foram registados ou transcritos. Assim os dados incluem transições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos ou outros que o investigador considere relevantes;
- iii) os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo em si do que propriamente pelos resultados ou produtos: as estratégias aplicadas aos estudos qualitativos permitiram verificar, através de pré e pós-testes, que as mudanças se verificam;
- iv) os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva: a teoria que o investigador pretende construir sobre o seu objeto de estudo é feita de “baixo para cima”, isto é, à medida que se recolham e examinam as partes, e através da inter-relação que existe entre elas, é construído um quadro que vai ganhando forma. O investigador qualitativo não recolhe dados ou demonstrações com o objetivo de confirmar ou verificar hipóteses previamente construídas;
- v) o significado é de importância vital na abordagem qualitativa: uma investigação qualitativa reflete uma espécie de diálogo entre os investigadores e os respetivos sujeitos, no qual os investigadores qualitativos fazem questão de se certificarem de que estão a compreender as diferentes perspetivas adequadamente.

A presença do investigador pode, efetivamente, alterar o comportamento natural dos sujeitos no decorrer da recolha de dados. Bogdan e Biklen (1994) confirmam que essas modificações existem e são designadas por “efeito do observador”. Por forma a conseguir analisar o modo como as pessoas normalmente se comportam e pensam no seu ambiente natural, os investigadores devem interagir de forma não intrusiva e tão natural quanto possível. Neste sentido, por exemplo, as entrevistas devem adquirir um aspeto informal, sendo “mais semelhantes a conversas entre dois confidentes do que a uma sessão formal de perguntas e respostas entre um investigador e um sujeito” (p. 68). De facto, não há uma forma de eliminar todos os efeitos produzidos pelo investigador. Nas palavras de Bogdan e Biklen (1994), “as pessoas revelam tanto de si próprias nas suas reações aos que habitualmente as rodeiam, como aos estranhos, desde que estejam cientes das diferenças” (p.69).

### 3.2. Estudo de caso

O estudo de caso consiste numa abordagem metodológica de investigação que, de acordo com Ponte (2006), pretende compreender em profundidade uma entidade bem definida, quer seja uma pessoa, uma instituição, uma disciplina, uma política, um sistema educativo, entre outras. Coutinho e Chaves (2002) referem que a melhor característica para identificar esta abordagem é o facto de detalhar intensivamente a dita entidade, que se designa por *caso*. Estes autores evocam Brewer e Hunter (1989) para propor seis categorias de *caso*, nomeadamente: indivíduos; atributos dos indivíduos; ações e interações; atos de comportamento; ambientes, incidentes e acontecimentos; e coletividades.

Tal como referem diversos autores (Ponte, 2006; Bogdan & Biklen, 1994), o estudo de caso é um método muito comum em educação matemática. No entanto, não é exclusivo desta área, sendo muito utilizado noutros campos, como na Medicina, em Direito e em Economia (Ponte, 2006).

Meirinho e Osório (2010) referem que os estudos de caso, na sua essência, herdam as características da investigação qualitativa, sendo que, de acordo com Cohen et al. (2007), a questão chave para um estudo de caso é a escolha de informação. Este autor ressalva que, embora seja muito comum um investigador procurar ocorrências significativas e frequentes, que lhe permitam a compreensão do *caso*, deve ser considerada a possibilidade de alguns eventos esporádicos poderem revelar informações pertinentes sobre uma pessoa ou uma situação particular que não deixa de ser importante e relevante para o estudo por apenas ter ocorrido uma vez.

Ponte (2006) refere que um estudo de caso é essencialmente um *design* de investigação. O autor apresenta diferentes características de um estudo de caso. Primeiramente, refere que esta é uma investigação de natureza empírica, que se baseia, em grande parte, em trabalho de campo ou em análise documental. Além do mais, embora se possa considerar fortemente descritivo, também poderá ter um carácter analítico, no qual se confronta a situação com outras já conhecidas e com teorias já existentes, podendo até gerar novas teorias ou questões. Em segundo lugar, o autor considera que este tipo de investigação não é experimental, ou seja, é utilizado quando o investigador, ao invés de pretender modificar a situação, procura compreendê-la tal como ela é.

Ponte (2006) faz ainda a distinção de duas perspetivas que pode assumir um estudo de caso: uma perspetiva interpretativa, que “procura compreender como é o mundo do ponto de vista dos participantes” (p. 12) e uma perspetiva pragmática, cuja intenção é “proporcionar uma perspetiva global do objeto de estudo, do ponto de vista do investigador, tanto quanto possível completa e coerente” (p.12). Embora o investigador deva ter preocupação em compreender o pensamento subjetivo dos participantes, é essencial que este também analise os dados do seu ponto de vista. Tal como refere Eisenhart (1988) “o investigador deve estar envolvido na atividade como um *insider* e ser capaz de refletir sobre ela como um *outsider*” (p.103).

De acordo com Yin (1984), um estudo de caso é uma investigação empírica que analisa um fenómeno dentro do seu contexto da vida real, especialmente quando os limites entre o fenómeno e o

contexto não estão claramente definidos. Este autor classifica os estudos de caso em três tipos de acordo com o seu propósito. Nesse sentido, os estudos de caso podem ser: i) exploratórios, que permitem obter informação preliminar acerca do objeto de estudo; ii) descritivos, que pretendem essencialmente descrever detalhadamente o *caso*; e iii) analíticos, que pretendem construir ou desenvolver uma nova teoria ou confrontá-la com teoria já existente.

O estudo de caso é um método ou *estratégia*<sup>4</sup>, muitas vezes visto como o “parente pobre” da investigação, havendo várias as críticas que lhe são apontadas. A primeira crítica é a falta de rigor da investigação, pois, por vezes, o investigador negligencia os dados recolhidos e deturpa as evidências por forma a influenciar o significado das descobertas e das conclusões (Yin, 1984). Outra crítica fortemente apontada aos estudos de caso diz respeito a questões de generalização. Efetivamente, durante largas décadas a investigação em Educação foi dominada por alguns enunciados sobre a forma de “leis gerais” ou “generalizações” a que os estudos de caso não permitiram dar resposta por se tratarem de um único caso e nada referirem sobre as semelhanças ou diferenças com outros casos existentes (Ponte, 2006). No entanto, tal como aponta este autor, dada a complexidade das situações educativas e dos próprios agentes (humanos), que apresentam grande variedade de intenções e significados, a abordagem não se têm revelado propícia a resultados fidedignos. Efetivamente encontramos no estudo de caso, não uma forma de encontrar soluções gerais para todos os problemas educativos, mas uma via para enriquecer o conhecimento da comunidade educativa relativo a determinadas situações que permitirão, a pouco e pouco, compreender melhor os fenómenos educativos.

Assim, compreende-se que o estudo de caso não tem como objetivo produzir conhecimento acerca de toda uma população, não fazendo sentido, por isso, formular conclusões sobre a forma de proposições gerais (Ponte, 2006). Este autor, reafirma assim a perspetiva de Yin (1984) de que a importância da educação está nas questões que se colocam e não apenas nas respostas que se obtêm.

### 3.3. Técnicas de recolha de dados

A escolha das técnicas de recolha de dados é uma etapa de extrema importância no processo de investigação, pois desta depende a concretização dos objetivos do estudo, pelo que o investigador não a pode minimizar (Aires, 2011). De acordo com Olabuenaga (1996), as principais técnicas de recolha de dados são: a observação, a entrevista e, ainda, a análise documental.

Assim, atendendo à natureza do presente estudo, os instrumentos devem fornecer informação diversificada que permita obter uma descrição detalhada e o mais completa possível do objeto de estudo. Os instrumentos de recolha de dados focados em seguida serão: observação (participante e não participante), entrevista e análise documental.

---

<sup>4</sup> Vários autores (Yin, 1984; Meirinhos & Osório, 2010) preferem a expressão *estratégia* à de *método* ou *metodologia de investigação*.



### 3.3.1. Observação participante e não participante

A observação é um dos instrumentos de recolha de dados mais importantes na investigação qualitativa (Aires, 2011). No fundo, tal como refere este autor, a observação, enquanto instrumento de recolha de dados para uma investigação, consiste na recolha de informação através do contacto direto com situações específicas. No entanto, esse contacto é feito de modo intencional e sistemático, o que permite distinguir de observações espontâneas. Esta técnica existe desde o início do estudo do mundo social e natural (idem, 2011) e releva ser bastante poderosa, como ferramenta de investigação, quando é: orientada para um objetivo de investigação concreto e previamente formulado; planificada sistematicamente em várias fases, aspetos, lugares e pessoas; controlada e relacionada com proposições, teorias sociais, abordagens científicas e explicações profundas; e, ainda, submetida a um controlo de veracidade, objetividade, fiabilidade e precisão (Olabuenaga, 1996).

De acordo com Cohen et al. (2007), a observação permite ao investigador reunir dados reais de situações reais, ou seja, consegue captar o que está a acontecer *in loco* em vez de tomar conhecimento apenas posteriormente. Esta técnica permite aos investigadores: entender os contextos dos agentes em estudo, captar informações que se pudessem perder inconscientemente, descobrir coisas que os participantes possam não revelar na entrevista, aceder às características pessoais dos participantes, entre outras vantagens.

Os observadores qualitativos não estão limitados por qualquer categoria de medida ou de resposta, são livres de pesquisar o que se revela significativo para os sujeitos. Aliás, a maior virtude da observação é, efetivamente, o seu carácter flexível e aberto (Aires, 2011). Assim, a observação tem um carácter flexível e aberto.

Cohen et al. (2007) classifica a observação em três tipos: i) observação altamente estruturada - é uma observação interessada, que procura encontrar o que previamente foi definido; ii) observação semiestruturada - consiste numa observação baseada em diversos pontos fulcrais, mas que terá uma recolha de dados mais livre e menos pré-determinada que a anterior; e iii) observação não estruturada - trata-se de uma observação em que o investigador não tem tão claro aquilo que procura, ou seja, apenas perante a situação que observa, e na qual está inserido, é que atribui o significado à sua pesquisa. Em suma, os autores referem que o primeiro tipo de observação consiste em usar os dados da observação para aceitar ou refutar as hipóteses previamente levantadas. Já os segundo e terceiro tipos terão um objetivo mais forte para gerar hipóteses ao invés de testá-las.

Olabuenaga (1996) refere que as observações podem distinguir-se, entre si, de acordo com vários critérios: i) de acordo com o grau de participação do observador - estratégia de observação participante ou não participante; ii) conforme o grau de sistematização e estruturação da informação - fixação, ou não, das categorias, dos grupos, etc.; iii) considerando o grau de controlo - nível de controlo e manipulação do investigador da situação.

Bogdan e Biklen (1994) recorrem a Gold (1958) para distinguir três papéis possíveis que os investigadores podem desempenhar enquanto observadores. Um investigador pode ser um *observador completo*, que não participa em nenhuma das atividades do local onde ocorre o estudo ou, inversamente, poderá ter um envolvimento completo com a instituição. Os investigadores de campo situam-se, normalmente, entre os dois extremos referidos.

Cohen et al. (2007) consideram numa das extremidades o *participante completo*, depois o *participante como observador*, em seguida o *observador enquanto participante* e, por fim, o observador completo. Os autores referem que os investigadores qualitativos inicialmente tendem a ter um foco muito particular e, à medida que o estudo progride, vão fragmentando os seus objetos de observação e, posteriormente, tentam encontrar causas e relações entre os agentes observados.

Meirinhos e Osório (2010) fazem a distinção entre observação participante e não participante. Estes autores referem que a observação participante ocorre quando o investigador não é um observador passivo, mas pode assumir um papel ativo no desenvolvimento do estudo de caso. Já a observação não participante subentende a ideia contrária, de que o investigador é um mero observador da ação, não interferindo com esta. Como é verificado por estes autores, não existe uma linha perfeita que separe estes dois tipos de observação. Ainda assim, a escolha do tipo de observação que o investigador adota deve ir ao encontro dos objetivos do estudo, ou seja, “se o objetivo for a compreensão do funcionamento da sala de aula tal como o aluno a vê, poder-se-á optar por participar mais com os alunos do que com o professor” (Bogdan & Biklen, 1994, p.127).

Bogdan e Biklen (1994) referem que, ao longo do estudo, o tipo de observação pode ser alterado conforme a necessidade e as circunstâncias, podendo a participação do investigador ser mais alta nuns momentos e mais baixa noutros.

Durante os primeiros dias de observação participante, é natural que o investigador fique um pouco de fora à espera que o observem e aceitem. Ainda assim, com o desenrolar das relações o investigador vai começando a participar mais (Bogdan & Biklen, 1994). Estes autores referem que “a tentativa de equilíbrio entre a participação e a observação pode também surgir como particularmente difícil” (p.127), uma vez que, no caso do ensino, por exemplo, pode ser difícil separar os papeis do professor com o do investigador (Beirão, 2012; Santos, 2011), uma vez que o professor não consegue captar com exaustão todas as informações necessárias ao investigador (professor enquanto investigador), ao mesmo tempo que o investigador não consegue controlar a turma do mesmo modo que um professor (investigador enquanto professor).

### 3.3.2. Entrevista

A entrevista é uma das fontes de informação mais importantes e essenciais nos estudos de caso (Yin, 1984), sendo, apontada por Aires (2011) como uma das técnicas mais comuns e importantes no estudo e compreensão do ser humano. Aliás, Olabuenaga (1996) considera-a como sendo a segunda

grande técnica de investigação qualitativa, seguidamente à observação. Uma entrevista consiste numa conversa intencional, normalmente entre duas pessoas (embora possa, por vezes, envolver mais pessoas) dirigida por uma das pessoas, *o entrevistador*, com o objetivo de obter informações sobre a outra, *o entrevistado* (Bogdan & Biklen, 1994). Apesar da intencionalidade que uma entrevista apresenta, esta pode começar sem qualquer introdução, o entrevistador pode simplesmente transformar uma determinada situação numa entrevista (idem). Este instrumento é bastante utilizado para “recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspetos do mundo” (idem, p.134).

De acordo com Bogdan e Biklen (1994), em investigação qualitativa, as entrevistas podem ser utilizadas de duas formas. Podem constituir a estratégia principal para a recolha de dados ou podem ser utilizadas paralelamente à utilização de outras técnicas, como por exemplo a análise documental, a observação participante, entre outras.

Olabuenaga (1996) diferencia três características básicas das entrevistas: i) as entrevistas desenvolvidas entre duas pessoas ou com um grupo de pessoas; ii) as entrevistas que abarcam um amplo espectro de temas (p. ex. biográficas) ou as que incidem sobre um só tema (denominadas *monotemáticas*); e iii) as entrevistas que se diferenciam quanto ao grau de estruturação - entrevistas estruturadas, nas quais o entrevistado é dirigido pelo entrevistador que o confronta com questões pré-definidas; e entrevistas não estruturadas, nas quais o entrevistador segue um esquema geral e flexível na ordem, conteúdo e formulação das perguntas.

Relativamente à diferenciação das entrevistas através da estrutura das questões abordadas, Bogdan e Biklen (1994) fazem a distinção entre entrevista estruturada, semiestruturada e não estruturada. Meirinhos e Osório (2010) focam-se na entrevista semiestruturada, referindo que, neste tipo de entrevista, embora o entrevistador estabeleça os âmbitos sobre os quais incidem as questões, este “não segue uma ordem pré-estabelecida na formulação das perguntas, deixando maior flexibilidade para colocar essas perguntas no momento mais apropriado, conforme as respostas do entrevistado” (p.63).

Aires (2011) explica que as entrevistas não-estruturadas desenrolam-se de acordo com os objetivos definidos, não sendo as perguntas definidas *a priori*, mas sim durante a interação entre os dois agentes (entrevistador e entrevistado). Este tipo de entrevistas aplica-se essencialmente em estudos de índole qualitativa e o seu objetivo principal consiste na recolha e no aprofundamento de informação sobre o sujeito e/ou o seu contexto.

Olabuenaga (1996) refere que nas entrevistas não estruturadas se pretende, principalmente, respostas do foro emocional, no qual o entrevistador procura os significados que o agente atribui a determinada situação. Por norma, as respostas são abertas e não existem categorias de respostas pré-estabelecidas, em oposição ao que acontece nas entrevistas estruturadas.

Olabuenaga (1996) considera que numa entrevista estruturada o entrevistador tem um papel neutro nas questões que coloca, não expressando ser a favor ou contra a questão em causa, ao contrário

do que poderá suceder numa entrevista não estruturada. Bogdan e Biklen (1994) referem ainda que ao longo de uma investigação pode ser necessário utilizar diferentes tipos de entrevista.

Por exemplo, no início do projeto pode parecer importante utilizar a entrevista mais livre e exploratória, pois nesse momento o objetivo é a compreensão geral das perspetivas sobre o tópico. Após o trabalho de investigação, pode surgir a necessidade de estruturar mais as entrevistas de modo a obter dados comparáveis num tipo de amostragem mais alargada. (Bogdan & Biklen, 1994, p. 136).

Os mesmos autores fazem ainda referência a algumas características para uma boa entrevista, nomeadamente: i) o entrevistador deve pedir ao entrevistado que o clarifique no caso de não compreender alguma resposta, pedindo-lhe que seja mais explícito ou que dê algum exemplo - “o que quer dizer com isso?”, “não tenho a certeza se estou a seguir o seu raciocínio.” ou “pode explicar melhor?” (p. 136); ii) o entrevistador deve evitar fazer questões de resposta fechada uma vez que estas não carecem dos pormenores e detalhes que o investigador procura; iii) o entrevistador não deve recear os momentos de silêncio do entrevistado visto que estes potenciam a reflexão do sujeito, permitindo que este organize os seus pensamentos e dê um rumo à conversa; iv) o entrevistador deve ser persistente e deixar que os entrevistados se habituem a si, assim, mesmo quando uma entrevista não corre tão bem, o investigador deve considerar é aquilo que se retira do estudo completo; v) o entrevistador deve considerar todas as palavras ditas pelo entrevistado como importantes e encarar cada palavra “como se ela fosse potencialmente desvendar o mistério e o modo de cada sujeito olhar para o mundo” (p.137).

### 3.3.3. Análise documental

A fonte de informação que agora se trata são os documentos que possam ter informações sobre o *caso* em estudo, designada normalmente por análise documental ou *pesquisa histórica*. Olabuenaga (1996) revela que esta técnica pode ser a forma mais ampla, universal e rica de recolher informações para uma investigação. Os documentos analisados podem ser, segundo Bogdan e Biklen (1994): textos escritos pelos sujeitos, documentos oficiais (ex.: documentos internos, comunicação externa, registos sobre os estudantes e ficheiros pessoais, etc.) ou documentos pessoais (ex.: diários íntimos, cartas pessoais, autobiografias). O investigador, por norma, utiliza material que já existe, sendo que a sua tarefa é apenas localizar e ter acesso.

Tal como referem Meirinhos e Osório (2010), a análise documental é uma estratégia básica num estudo de caso. De acordo com estes autores, a informação que o investigador recolha poderá servir para contextualizar o caso, acrescentar informação ou para validar evidências de outras fontes” (p. 62).

Os investigadores qualitativos por diversas vezes recorrem aos registos biográficos dos estudantes que se encontram nas escolas e que contêm informações que podem ser relevantes para o estudo, nomeadamente: relatórios psicológicos, registos de testes e frequência às aulas, comentários de professores, informações acerca de outras escolas frequentadas pelo estudante e perfis da família. Embora os investigadores utilizem esta técnica, têm consciência de que poderá não traduzir informações

precisas sobre a criança ou jovem. Neste sentido, a análise destes registos deve ser cruzada com a informação obtida através das entrevistas com os alunos ou com os pais (Bogdan & Biklen, 1994).

### 3.4. A ética

No âmbito de uma investigação, ou de qualquer atividade profissional ou social, os aspetos de natureza ética têm de ser, necessariamente, considerados. De acordo com Bogdan e Biklen (1994), a ética consiste “nas normas relativas aos procedimentos considerados corretos ou incorretos por determinado grupo” (p.75). A maioria das especialidades académicas e profissões apresentam códigos deontológicos que estabelecem normas de conduta para os respetivos membros para dilemas e questões morais com as quais se podem confrontar.

No caso de uma investigação qualitativa, que utiliza sujeitos humanos como objetos de estudo, é necessário garantir que estes estão devidamente informados e protegidos contra qualquer espécie de dano. No fundo, pretende-se que os sujeitos adiram voluntariamente ao projeto de investigação, tomando conhecimento prévio da natureza do estudo e dos perigos e obrigações que dele possam advir. Além disso, o investigador deve garantir que os sujeitos não são expostos a riscos superiores aos ganhos que possam decorrer (Bogdan & Biklen, 1994).

Assim, no estudo levado a cabo, os objetivos da investigação e as condições de participação são previamente definidos, podendo existir ajustes até ao final da investigação. Além do mais, são protegidas as identidades dos participantes, sendo os nomes utilizados ao longo do estudo fictícios, mantendo-se apenas o género. Por fim, são feitos os pedidos de autorização na participação no estudo a cada um dos participantes envolvidos ou aos respetivos encarregados de educação, informando-os sobre a veracidade dos dados recolhidos e analisados.

### 3.5. Procedimentos metodológicos adotados

Este estudo teve como principal objetivo analisar o raciocínio dos alunos durante a resolução de desafios lógicos e compreender a sua relação com os processos de raciocínio matemático desenvolvidos pelos alunos, durante a demonstração de determinadas conjecturas. Durante a investigação optou-se por uma metodologia qualitativa, seguindo a modalidade de estudo de caso. Pelo facto de se pretender saber mais sobre os processos de raciocínio em situações que não envolviam conteúdos matemáticos (aquando da realização de desafios lógicos) e verificar o desempenho dos alunos face a demonstrações de cariz algébrico, as referidas opções metodológicas, apoiadas na exploração teórica prévia, foram consideradas as mais adequadas.

O estudo, concretizado ao longo do presente ano letivo, seguiu a par com as ideias dos autores Bogdan e Biklen (1994), que permitiram dar um certo rumo a esta primeira investigação da autora. O estudo apresentado envolveu a realização de sessões de trabalho com alunos de uma turma do 12.º ano de uma escola do concelho de Almada.

A investigação focou-se na resolução de desafios lógicos, que não envolvem conteúdos matemáticos específicos, com o objetivo de compreender as diferenças entre o raciocínio dos alunos na resolução de desafios lógicos e na resolução de demonstrações matemáticas. Por forma a atingir o objetivo traçado, foram abordadas as seguintes questões:

1. Que tipo de raciocínio demonstram os alunos durante a resolução de desafios lógicos e de demonstrações algébricas?
2. Quais as maiores dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução de desafios lógicos comparativamente à resolução de demonstrações algébricas?
3. De que forma a utilização de exemplos influencia o raciocínio dos alunos durante a resolução de desafios lógicos ou demonstrações algébricas?
4. Que diferenças são evidenciadas pelos alunos entre a capacidade de resolução de desafios lógicos e a capacidade de resolução de demonstrações algébricas?

Com vista a dar resposta a estas questões concretizou-se a recolha de dados e três sessões. Em cada uma das sessões, os alunos foram confrontados com duas propostas, um desafio lógico e uma demonstrações algébrica, tendo de escolher por qual iriam iniciar.

Em todas as sessões os alunos foram acompanhados pela investigadora, sendo que, após cada sessão, a investigadora realizou entrevistas aos alunos participantes por forma a compreender quais as dificuldades sentidas, quais os tipos de proposta que mais tinham gostado de responder e os principais motivos para essa preferência.

### 3.5.1. Critérios de escolha dos alunos

A escolha dos alunos para a participação na investigação foi realizada em três fases. Primeiramente procurou-se escolher os alunos que apresentaram as características pretendidas face aos objetivos do estudo, nomeadamente: criatividade, lógica, astúcia, pelo que foram aplicados dois desafios lógicos a todos os alunos, em simultâneo, no final de uma das aulas da disciplina de matemática. Os desafios versavam sobre questões lógicas simples e tinham como objetivo perceber a desenvoltura da turma face a este tipo de desafios. Após a análise da investigadora às respostas dos alunos, foi-lhes pedido que se pronunciassem relativamente à vontade de participar voluntariamente na investigação, dando-lhes, nesse momento, a conhecer a exigência do nível de participação extra escolar que o estudo implicava. A escolha foi feita, então, entre os alunos que se disponibilizaram para participar no estudo e que tinham apresentado, através da resolução dos desafios, as características pretendidas. Nesta fase, foram escolhidos seis alunos.

Na segunda fase de seleção dos alunos foram utilizados essencialmente dois critérios que foram estabelecidos tendo em consideração as questões de investigações. O primeiro critério prendeu-se com os níveis de conhecimento dos alunos, procurando-se que estes apresentassem diferentes níveis de aproveitamento à disciplina, por forma a que este parâmetro não constituísse uma restrição ao estudo e se pudesse analisar a diversidade de raciocínios lógico e matemático, independentemente dos resultados

escolares. Para tal, consideraram-se as avaliações do 10.º ano, 11.º ano, a avaliação do 1.º período do 12.º ano e as duas primeiras avaliações do 2.º período, uma ficha e um teste. É importante referir que não foi possível considerar a classificação final do 2.º período, uma vez que a seleção dos alunos e a recolha de dados decorreu durante o mesmo. Como segundo critério, foi considerada a comunicação oral dos alunos em aula, isto é, a sua participação e capacidade de se exprimirem matematicamente. Assim, foram selecionados alunos que apresentassem diferentes níveis de participação de forma a compreender a influência este aspeto pode ter influência nos raciocínios dos alunos. Nesse sentido, avaliou-se a participação dos alunos qualitativamente, tendo em conta os seguintes fatores: a iniciativa, a qualidade do discurso, a pertinência das questões colocadas e o à vontade para esclarecer dúvidas. Foram atribuídos os valores 1, 2 ou 3 quando a participação se qualificava, respetivamente, como fraca, boa ou excelente. Todas as informações relativas aos alunos encontram-se sistematizadas na Tabela 13.

Depois desta fase, os alunos escolhidos participaram nas sessões e, de entre os seis, apenas foram analisados dois estudo de caso, Luísa e Matilde. Estas alunas foram escolhidas, pois apresentavam características que a investigadora considerava relevantes, nomeadamente: Luísa, que é das alunas com melhor aproveitamento à disciplina e melhor capacidade de intervenção na aula, e Matilde, que é das alunas menos participativas em aula, embora tenha bons resultados, o que se justifica apenas pelo seu grande esforço e dedicação à disciplina. Além disto, a investigadora analisou as várias sessões e estas duas alunas apresentavam vários pontos em comum (dificuldades e mecanização dos conceitos), mas também alguns em que tinham interessantes características distintas (noções conceituais dos objetos matemáticos e os processos de investigação matemática, nomeadamente a capacidade de elaboração de conjecturas), pelo que se tornou relevante para o estudo a comparação de ambas.

Tabela 13: Sistematização das informações dos alunos selecionados na segunda fase.

<b>Alunos</b> Nomes fictícios	<b>10.º ano</b> Nota final	<b>11.º ano</b> Nota final	<b>12.º ano</b> Nota final (1.º período)	<b>12.º ano</b> Ficha (2.º período)	<b>12.º ano</b> 1.º teste (2.º período)	<b>Participação</b>	<b>Estudo de Caso</b>
<b>Sara</b>	17	11	10	13,7	15,1	3	X
<b>Luísa</b>	18	19	19	19,7	18,7	3	✓
<b>Rodrigo</b>	14	9	6	1,8	6,7	2	X
<b>Matilde</b>	15	16	15	16,0	14,8	2	✓
<b>Pedro</b>	11	10	8	8,0	5,4	1	X
<b>Eva</b>	14	14	14	14,9	13,9	1	X

### 3.5.2. Técnicas e instrumentos de recolha de dados

Os dados da investigação em causa foram obtidos a partir da observação participante e não participante, das entrevistas realizadas e da análise documental recolhida durante as sessões de trabalho. Tanto relativamente às sessões como às entrevistas foi efetuado um registo pela investigadora por forma a facilitar a recolha de informação de forma rigorosa e detalhada.

### 3.5.2.1. Observação

A investigadora esteve presente em todas as aulas da turma dos alunos envolvidos no estudo, tendo procedido à observação não participante em alguns momentos e à observação participante noutros. Relativamente à observação não participante, a investigadora registou algumas informações necessárias para elaborar uma caracterização individual de cada um dos alunos e da sua relação com a disciplina de matemática, nas quais foram tomadas em consideração: a participação e a concentração em aula; o empenho e a realização do trabalho fora da aula (tanto trabalhos de casa, trabalho autónomo ou propostas extra da professora titular da turma); e outros que se revelassem pertinentes.

Este tipo de observação foi particularmente importante durante as sessões de trabalho, nas quais a investigadora pôde compreender em profundidade as várias fases do raciocínio dos alunos e as origens de eventuais bloqueios que iam surgindo durante a resolução dos desafios e das demonstrações.

Por outro lado, a observação participante pretende dar visibilidade aos processos de raciocínio utilizados pelos alunos e pretende então fazer uma comparação entre o ambiente artificial, no qual as alunas estavam sozinhas com a investigadora numa sala de aula a resolverem as propostas dadas por esta, e o ambiente natural de sala de aula, no qual os alunos poderão, de certa forma, sentir o *efeito do observador* de forma mais atenuada, o que poderá contribuir para que o investigador chegue a informações que artificialmente o aluno poderia não transmitir.

A investigadora procurou, durante o estudo, dar liberdade às alunas para que desenvolvessem os seus raciocínios. Ou seja, procurou ter uma observação não participante sempre que as alunas realizavam as propostas, optando por uma observação participante ou a entrevista semiestruturada quando percebia que as alunas não conseguiam progredir nas suas resoluções.

### 3.5.2.2. Entrevista semiestruturada

Tal como já referido, foram realizadas entrevistas às duas alunas participantes no estudo, durante e após cada uma das sessões. Quanto ao nível de estruturação, as entrevistas realizadas foram semiestruturadas, nas quais a investigadora procurou compreender as dificuldades sentidas pelas alunas, o gosto destas pela resolução de desafios lógicos e a preferência entre os desafios lógicos e as demonstrações algébricas.

### 3.5.2.3. Análise documental

Como forma de recolher informação acrescida sobre o perfil dos alunos foram utilizadas algumas fontes documentais facultadas pela escola, nomeadamente: reprovações dos alunos, classificações na disciplina de matemática ao longo do percurso escolar, entre outras que pudessem caracterizar a relação dos alunos com a disciplina de matemática. Além destas, procedeu-se à recolha dos registos das resoluções dos alunos de cada uma das sessões, tanto dos desafios lógicos como dos problemas matemáticos, como forma de analisar e compreender os processos de raciocínio dos alunos.



### 3.5.3. Sessões de trabalho

A recolha de dados decorreu, globalmente, em seis sessões de trabalho, todas elas realizadas integralmente em horário extraordinário combinado com as alunas participantes. Cada sessão teve, aproximadamente, 60 minutos, tentando que cada proposta fosse desenvolvida no máximo em 30 minutos. As alunas foram confrontadas, na sua totalidade, com três desafios lógicos e três demonstrações algébricas. As primeiras sessões de trabalho decorreram dias 21 (Matilde) e 26 (Luísa) de fevereiro, onde foram aplicados o Desafio Lógico 1 e a Demonstração Algébrica 1. As segundas sessões de trabalho realizaram-se nos dias 1 (Matilde) e 2 de março (Luísa), na qual foram aplicados o Desafio Lógico 2 e a Demonstração Algébrica 2. As terceiras sessões de trabalho decorreram dias 7 (Luísa) e 8 (Matilde) de março, onde se realizaram o Desafio Lógico 3 e a Demonstração Algébrica 3. A calendarização das sessões de trabalho encontra-se sistematizada na Tabela 14.

Tabela 14: Calendarização das sessões de trabalho.

Alunos (Nomes fictícios)	Primeira sessão	Segunda sessão	Terceira sessão
<b>Luísa</b>	26/02	02/03	07/03
<b>Matilde</b>	21/02	01/03	08/03

As tabelas abaixo apresentam a duração de cada uma das sessões de trabalho e as horas a que foram realizadas (Tabela 15), o tempo em que cada aluna demorou a realizar os desafios lógicos e as demonstrações algébricas em cada uma das sessões (Tabela 16) e as preferências de cada aluna relativamente à proposta por que escolheu iniciar a sessão, isto é, se iniciou pelo desafio ou pela demonstração (Tabela 17).

Tabela 15: Horário de cada uma das sessões e respetiva duração.

Alunos (Nomes fictícios)	Primeira sessão	Segunda sessão	Terceira sessão
<b>Luísa</b>	11h18 – 12h24 (66')	13h56 – 14h50 (54')	12h16 – 13h01 (45')
<b>Matilde</b>	15h07 – 16h01 (56')	12h22 – 13h02 (40')	12h14 – 13h08 (54')

Tabela 16: Duração dos desafios e das demonstrações em cada uma das sessões.

Alunos (Nomes fictícios)	Primeira sessão		Segunda sessão		Terceira sessão	
	Desafio	Demonstração	Desafio	Demonstração	Desafio	Demonstração
<b>Luísa</b>	26'	40'	5'	49'	15'	30'
<b>Matilde</b>	30'	26'	6'	34'	26'	28'

Tabela 17: Preferências dos alunos relativamente às demonstrações e aos desafios.

Alunos (Nomes fictícios)	Primeira sessão	Segunda sessão	Terceira sessão
<b>Luísa</b>	Demonstração	Desafio	Desafio
<b>Matilde</b>	Desafio	Desafio	Desafio

### 3.6. Os desafios lógicos de seleção

Em seguida são apresentados os dois desafios lógicos que serviram para escolher os alunos na primeira fase. Estes dois desafios foram realizados no final de uma aula de matemática, na qual todos os alunos da turma estavam presentes. Os desafios foram entregues a cada alunos em simultâneo e foi-lhes pedido que resolvessem os dois, da melhor forma que conseguissem. A investigadora pediu que fosse registada na folha de resposta todos os raciocínio que os alunos tivessem durante a resolução e aqueles que considerassem relevantes para Os alunos tiveram cerca de 15 minutos para a realização destes dois desafios. Depois de recolher todas as respostas, a investigadora explicou aos alunos qual a finalidade das suas respostas pedindo que os alunos que não estivessem interessados na participação do estudo se pronunciassem.

#### 3.6.1. Profissões

Consideremos a Andreia, a Bianca e a Carlota. Uma delas é tenista, outra ginasta e outra nadadora. A ginasta, a mais baixa das três, está solteira. A Andreia, que é a sogra da Bianca, é mais alta que a tenista. Que desporto pratica cada uma delas?

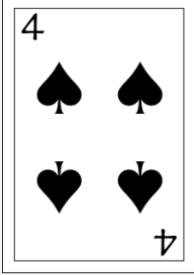
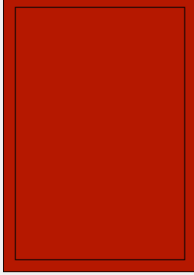

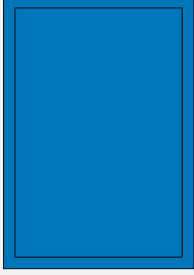

Extraído de: Segarra (2011, p.113).

#### Resolução:

A Andreia é mais alta que a tenista, portanto não pode ser a tenista, nem a ginasta, pois a ginasta é a mais baixa. Logo, a Andreia é nadadora. A ginasta não pode ser a Bianca, pois a ginasta é solteira e é dito que a Bianca é casada (por ser nora da Andreia).

Pelo que a ginasta só pode ser a Carlota. Por exclusão de partes, a Bianca só pode ser a tenista.

### 3.6.2. Os Jokers do baralho vermelho



A B C D E

Todas estas cartas têm costas azuis ou vermelhas. Qual é o número mínimo de cartas a que temos de dar a volta para saber se a afirmação “Todas as cartas de costas vermelhas são jokers” é verdadeira ou falsa?

Extraído de: Veloso, E. & Viana, J.P. (1992), Desafio 104 do livro Desafios 2

#### Resolução:

Antes de começar, pensemos primeiro na frase que está em causa: “Todas as cartas de costas vermelhas são jokers”. Isto quer dizer que as cartas azuis podem ser qualquer coisa, jokers ou não, tanto faz - nunca irão ter influência na veracidade da frase. As vermelhas é que têm de ser obrigatoriamente jokers.

Analisemos então a questão carta a carta.

A carta B é azul e a nós só nos interessam as cartas vermelhas. Não é preciso virá-la.

A carta D é importante. Temos de lhe dar a volta para ver se é realmente é um joker.

Se não for, a afirmação é falsa.

A carta E também é importante e tem de ser virada. Para a informação ser verdadeira, a carta tem de ser azul. Se for vermelha então nem todas as cartas vermelhas seriam jokers.

Finalmente, as cartas A e C. Não precisamos de as virar porque, para o nosso problema, tanto nos faz que os jokers tenham costas azuis ou vermelhas.

O importante é que as cartas vermelhas sejam jokers, as azuis tanto podem ser como não.

Conclusão: apenas temos de dar a volta às cartas D e E.

A afirmação é verdadeira apenas no caso de D ser joker e E ser azul.

### 3.7. Os desafios lógicos aplicados

#### 3.7.1. Desafio 1: As idades dos meninos

- A soma das idades dos meus três filhos é 14 - disse-me aquela mãe orgulhosa. - E o produto é precisamente o número que tenho estampado aqui na camisola. Como gostas de resolver problemas, vê lá se consegues descobrir quantos anos tem cada um.

Olhei para a camisola e fiz uns cálculos.

- Só assim não chego lá.

- Pois então digo-te que o do meio ficou hoje em casa porque está com gripe.

Quais são as idades dos três rapazes?

Extraído de: Viana, J.P. (2015, p.85)

##### Resolução:

Atendendo a que a informação da soma e do produto é insuficiente para decidir sobre as idades dos

rapazes pode concluir-se que há mais do que uma solução simultânea

para a soma 14 e para o produto, que não conhecemos à partida. Dado

que a informação de que há um rapaz com idade intermédia permite

decidir pela solução que interessa, tal leva a suspeitar de que apenas

uma das soluções simultâneas é constituída por três números diferentes.

Neste momento faz todo o sentido listar as diferentes soluções possíveis

para as idades dos três rapazes cuja soma seja 14, que não são tantas

como isso, e verificar a partir da observação dos produtos a confirmação

da suspeita e em que situação tal ocorre.

Observa-se assim que há, na realidade duas situações em que há mais do

que uma solução relativamente à soma e ao produto, as de produto 40 e

as de produto 72. Afastando as hipóteses em que se repetem valores, temos que as idades dos três

rapazes são 1, 5 e 8 anos.

Idade (soma 14)	Produto
1 – 1 – 12	12
1 – 2 – 11	22
1 – 3 – 10	30
1 – 4 – 9	36
1 – 5 – 8	40
1 – 6 – 7	42
2 – 2 – 10	40
2 – 3 – 9	54
2 – 4 – 8	64
2 – 5 – 7	70
2 – 6 – 6	72
3 – 3 – 8	72
3 – 4 – 7	84
3 – 5 – 6	90
4 – 4 – 6	96
4 – 5 – 5	100

#### 3.7.2. Desafio 2: Simpáticas, mas... Um pouco mentirosas!

Tenho quatro alunas, a Susana, a Fátima, a Carla e a Ana, que levam a vida com alegria. Outro dia, numa aula, estavam a fazer um trabalho de grupo e passei pela mesa delas. De repente reparei num objeto estranho caído aos pés de uma cadeira.

- De quem é isto? - perguntei, curioso.

- É da Fátima ou da Ana, professor - respondeu-me logo a Susana.

- É da Carla - contrapôs a Fátima.

- Olhe, meu é que não é - defendeu-se a Carla.

- A Carla mentiu - acrescentou a Ana.

Bem, depois de uma investigação mais cuidada, concluí que só uma é que me tinha dito a verdade.

As outras três mentiram-me. Quem era a dona do objeto estranho?

Extraído de: Veloso, E. & Viana, J.P. (1995), Desafio 31 do livro Desafios 4

Resolução: (Existem justificações alternativas)

Verificamos que há sempre duas raparigas que não mentem. Se fosse da Carla, a Fátima e a Ana falavam a verdade. Se fosse da Fátima, a Susana e a Carla não mentiam. Se ele fosse da Ana, só a Fátima e a Ana mentiam. Pelo que se conclui que só pode ser da Susana.

### 3.7.3. Desafio 3: O agente de recenseamento

O sr. Sousa é agente de recenseamento e foi destacado para fazer um inquérito na ilha dos *Falks* e dos *Verks*, aquela ilha em que não há senão *Falks* - pessoas que mentem sempre - e *Verks* - pessoas que dizem sempre a verdade. Começou pelas casas onde sabia viverem casais sem filhos, e visitou o casal Pereira, o casal Oliveira, o casal Figueira e o casal Macieira. Fez sempre a mesma pergunta - quem nesta casa é *Verk*? E quem nesta casa é *Falk*? - e recebeu dos quatro maridos as seguintes respostas:

(Pereira) - “Ambos somos *Falks*!”

(Oliveira) - “Pelo menos um de nós é *Falk*”.

(Figueira) - “Se eu sou um *Verk*, então também a minha mulher é *Verk*”.

(Macieira) - “Eu e a minha mulher somos do mesmo tipo; ambos *Falks* ou ambos *Verks*”.

Sousa ficou um pouco perplexo, tendo algumas dúvidas como preencher as fichas. Será possível dizer, em cada um dos casais, quem é *Verk* e quem é *Falk*?

Extraído de: Viana, J.P. (1991), Desafio 41 do livro Desafios

Resolução:

Casal	Justificação
<b>Pereira</b>	O marido declara: “Ambos somos <i>Falks</i> !” Concluimos logo que o marido não pode ser um <i>Verk</i> (note-se que um <i>Verk</i> nunca pode dizer que é um <i>Falk</i> !). Então o marido é um <i>Falk</i> e daí a frase “ambos somos <i>Falks</i> ” é falsa. Logo a mulher tem de ser <i>Verk</i> .
<b>Oliveira</b>	O marido declara: “Pelo menos um de nós é <i>Falk</i> .” Aqui a primeira conclusão é que o marido não pode ser <i>Falk</i> , pois nesse caso estaria a dizer uma verdade, coisa que os <i>Falks</i> nunca dizem. Logo o marido é <i>Verk</i> , e portanto a frase que diz é verdadeira. Mas então a mulher tem de ser <i>Falk</i> .
<b>Figueira</b>	O marido diz: “Se eu sou <i>Verk</i> , então a minha mulher também é <i>Verk</i> .” Esta frase parece ser pouco conclusiva, e à primeira vista compreende-se a perplexidade do sr. Sousa perante esta resposta. Mas ainda neste caso é possível concluir o tipo de cada membro do casal, embora o raciocínio que se segue possa não ser claro à primeira leitura. a) Começemos por demonstrar que se o marido é <i>Verk</i> , então a sua mulher também o é. Com efeito, se o sr. Figueira é <i>Verk</i> , o que ele diz é verdade, e portanto da sua frase conclui-se que a sua mulher é <i>Verk</i> . b) Então está demonstrado que a frase que o sr. Figueira diz é verdadeira. Mas se ele diz uma verdade, então ele é <i>Verk</i> ! E portanto a mulher também o é, como já vimos. São então ambos <i>Verks</i> !
<b>Macieira</b>	O marido diz: “Eu e a minha mulher somos do mesmo tipo; ambos <i>Falks</i> ou ambos <i>Verks</i> ”. Vejamos separadamente o caso em que o sr. Macieira é <i>Verk</i> e o caso em que ele é <i>Falk</i> . Suponhamos que o Sr. Macieira é <i>Verk</i> : então o que ele diz é verdade; e como ele e a mulher têm de ser do mesmo tipo, a mulher é <i>Verk</i> também. Suponhamos que o Sr. Macieira é <i>Falk</i> : então, sendo falso o que diz, os dois cônjuges são de tipo diferente e a mulher é <i>Verk</i> . Ou seja, seja o marido <i>Verk</i> ou <i>Falk</i> , a mulher tem que ser <i>Verk</i> . Mas como a frase que diz não implica que ele seja uma ou outra coisa, o Sr. Sousa neste caso apenas pode tirar conclusões sobre a mulher ficando sempre na dúvida sobre o marido! De resto, se a mulher fosse uma <i>Falk</i> , o marido nunca poderia ter dito aquela frase, pois os habitantes desta ilha nunca podem dizer que são <i>Falks</i> — pois se o são, então estão a dizer a verdade, o que nunca fazem, e se o não são, ou seja, se são <i>Verks</i> , estão a mentir, o que um <i>Verk</i> não faz...

## 3.8. As demonstrações algébricas aplicadas

Os problemas de teoria de números poderão apresentar variados caminhos de resolução, pelo que será apresentada apenas uma sugestão.

### 3.8.1. Demonstração 1: Quadrados Perfeitos

Mostre que se um número pode ser escrito como a soma de dois quadrados perfeitos, o seu dobro também pode.

Resolução:

Seja  $x = a^2 + b^2$ , para certos inteiros  $a$  e  $b$ .

Temos então que  $2x = x + x = (a^2 + b^2) + (a^2 + b^2) = 2a^2 + 2b^2$ .

Então temos de construir o seguinte “artifício”:

$$2a^2 + 2b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + a^2 + 2ab + b^2$$

Pelo que,  $a^2 - 2ab + b^2 + a^2 + 2ab + b^2 = (a - b)^2 + (a + b)^2$ , ou seja, o dobro de um número que pode ser escrito como soma de dois quadrados também pode ser escrito como soma de dois quadrados perfeitos.

### 3.8.2. Demonstração 2: Números Primos

Explique por que todos os números primos, com duas exceções, deverão estar um número acima ou abaixo de um múltiplo de 6.

Resolução:

As duas exceções consideradas são, obviamente o 2 e o 3. Tentemos, então, resolver este problema por redução ao absurdo. Suponhamos que um determinado número primo está dois ou quatro números acima de um múltiplo de seis. Assim, esse número será par, porque todos os múltiplos de seis são pares. Mas isso é absurdo, pois (à exceção do 2, que já foi tratado inicialmente) um número par não pode ser primo. Suponhamos, agora, que um número primo está três números acima de um múltiplo de seis será divisível por três, pois todos os múltiplos de seis são divisíveis por três, pelo que não podem ser primos. Assim, resta-nos apenas o caso em que um número primo está um número a cima ou abaixo de um múltiplo de seis.

### 3.8.3. Demonstração 3: Produto

Prove que o produto de quaisquer três números naturais consecutivos é divisível por 6.

Resolução:

Para dar resposta a esta questão basta ter em atenção que em qualquer grupo de três números naturais consecutivos existe sempre um número par e existe sempre um número múltiplo de 3. Pelo que, na fatorização deste produto, irá constar pelo menos um 2 e um 4. Logo, como a factorização de 6 é igual a  $2 \times 3$ , concluímos que este produto é divisível por 6.

## 4. Estudo de caso: Luísa

Nos capítulos 4 e 5, tal como já referido anteriormente, é feita a abordagem aos estudos de caso realizados na investigação. É importante relembrar que os alunos apresentam todos nomes fictícios, de forma a preservar a sua identidade e privacidade, tal como referido no subcapítulo Ética. Doravante, nos diálogos transcritos, cada aluno é identificado pela inicial do seu nome fictício e a investigadora por I.

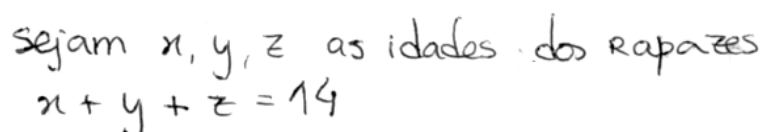
### 4.1. Caracterização de Luísa

Luísa tem 17 anos e é uma aluna extremamente trabalhadora e interessada, facto que a leva a querer aprender matemática para além do programa de matemática A. Já foi encontrada pela investigadora a realizar alguns exercícios de nível universitário durante a aula de matemática, enquanto os seus colegas realizavam exercícios recomendados pela docente da turma, que Luísa já tinha concluído. A aluna tem uma linguagem bastante coerente e cientificamente correta, fazendo parte do grupo de alunos mais participativos em aula. Luísa terminou o 10.º ano de escolaridade com 18 valores e o 11.º ano com 19 valores. Neste ano letivo, a aluna concluiu o 1.º período com 19 valores à disciplina, tendo obtido no 2.º período a mesma classificação. No futuro deseja seguir um curso no ensino superior relacionado com as áreas da matemática ou da física.

### 4.2. Desafios lógicos

#### 4.2.1. Desafio 1: Idades dos Meninos

Numa primeira leitura, Luísa rapidamente transformou a primeira informação do desafio numa equação, tal como sugere a Figura 10, o que demonstra uma tentativa de matematizar a informação lida, tal como habitualmente faz nos problemas de matemática realizados na sala de aula.



A handwritten note in black ink on a white background. The first line reads 'sejam x, y, z as idades dos rapazes' and the second line shows the equation 'x + y + z = 14'.

$$\text{sejam } x, y, z \text{ as idades dos rapazes}$$
$$x + y + z = 14$$

Figura 10: Tradução simbólica por parte de Luísa de algumas informações do Desafio 1.

No diálogo a seguir apresentado é visível a perceção inicial que a aluna teve ao interpretar o desafio. Deste diálogo, é importante realçar que a aluna, embora tenha achado que não são fornecidos dados suficientes no desafio, considerou que teria de existir alguma forma de responder, o que revela que não chegou a considerar a hipótese de, efetivamente, haver escassez de informação. Esta situação poderá ter surgido do facto de os problemas matemáticos apresentados na sala de aula terem, na maioria das vezes, solução. Além disso, a dificuldade que a aluna apresentou em compreender como poderia

utilizar a informação da soma das idades dos meninos e a do filho do meio estar em casa com gripe, poderá advir de estar demasiado presa à equação que inicialmente formulou.

- L - Então só nos dizem que a soma é 14 e um deles está com gripe?  
I - O que é que achas?  
L - É assim... Lendo pela... Lendo duas ou três vezes, vejo que não há dados suficientes, mas... Se é possível fazer, há alguma maneira.  
I - Se há dados aparentemente insuficientes deves utilizar aqueles que te dão, aproveita aquilo que te dizem no enunciado.  
L - Porque eles só me dão uma coisa.  
I - Que coisa?  
L - Que a soma da idade deles é 14, ou seja,  $x + y + z = 14$ . Agora, a partir daí...  
I - Tens de aproveitar essa informação.  
L - Pois, isso sei eu... Mas aproveitar como? Só tenho isto, não sei se me permite chegar a algum lado!

A investigadora sugeriu que Luísa pensasse nas inúmeras hipóteses que poderia excluir com a informação da soma da idade dos meninos. Assim, a aluna deduziu que o irmão mais velho não poderia ter mais do que catorze anos. Quando a investigadora pediu que supusesse que não existiam irmãos “recém-nascidos” (com menos de um ano de idade), facilmente concluiu que o mais velho teria no máximo doze anos, tendo os dois mais novos um ano cada, e listou as idades possíveis, tal como se pode verificar na Figura 11.

Sejam  $x, y, z$  as idades dos rapazes  $x, y, z \in [1, 12]$   
 $x + y + z = 14 \Leftrightarrow$   
Idades possíveis  
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

$x \neq y \neq z$   
idades  
 $x \rightarrow$  mais velho  
 $y \rightarrow$  do meio  
 $z \rightarrow$  mais novo

Figura 11: Excerto da resolução de Luísa no Desafio 1.

No que diz respeito à informação do produto estampado na camisola da senhora, Luísa considerou como sendo uma informação inútil para a resolução do desafio. Já relativamente à frase “o do meio ficou hoje em casa porque está com gripe!”, a atenção da aluna foi desviada para a doença do filho. No diálogo apresentado em seguida percebe-se que, tanto num caso, como noutro, a aluna tentou encontrar justificações mais empíricas, revelando que, aos poucos, conseguiu despertar a sua criatividade e afastar-se da abordagem mais abstrata e lógica.

- L - Esta conversa do produto estampado na camisola não serve para nada, pois não?  
I - Será que não?  
L - A única coisa que eu me lembro, mas que é um bocado estúpido é que normalmente... Ah não, pode não ser! É que as camisolas têm dois algarismos estampados!  
I - Ah, não... Não tem nada a ver neste caso.  
L - Eu já estou por tudo! “O do meio ficou hoje em casa porque está com gripe!” . Mas a gripe, não... Tanto pode ser uma um bebé como uma criança de 12 anos, entre essas idades com gripe.  
L - É verdade... Será que te estás a focar na informação importante dessa frase?  
I - Oh meu Deus...



Depois de ser sugerida a procura de informação relevante na frase considerada anteriormente, a aluna chegou à conclusão que, havendo um irmão do meio, então não poderia haver gémeos, tendo regressado à equação inicial e considerado uma restrição para as variáveis ( $x \neq y \neq z$ ).

- L - O do meio... Então não há gémeos, posso ir por aí!
- I - Podes ir por aí, certo.
- L - Então o  $x$  é diferente do  $y$  que é diferente do  $z$ .
- I - Já tens mais qualquer coisa, vês.
- L - Uau! Então, se não são gémeos...
- I - Mas não te esqueças que essa é a última informação que ela recebe, por isso também deve ser a última informação que tu deves receber!
- L - Coloca-te no papel dessa senhora.

Até este momento, Luísa considerou a informação do produto pouco útil, pelo que não conseguiu compreender a relação entre o produto estampado na camisola não ser suficiente para chegar à resposta e o facto de não existirem gémeos. Apesar disso, entendeu que, pelo facto de a senhora não conseguir chegar à resposta correta com o número estampado na camisola à sua frente, faltava alguma informação.

Posteriormente, a aluna voltou à abordagem matemática, tentando fazer algumas operações algébricas para resolver a equação, mas compreendeu que seria impossível encontrar a sua solução, por se tratar de apenas uma equação para determinar três incógnitas. Ao ver que Luísa não estava a conseguir libertar-se desta perspetiva, a investigadora encaminhou-a de modo a verificar os vários casos possíveis. Assim, Luísa considerou que  $x$  representaria a idade do filho mais velho,  $y$  traduziria a idade do filho do meio e  $z$  seria a idade do filho mais novo. A aluna revelou novamente que ainda não tinha sido capaz de interiorizar a situação retratada, ao utilizar de forma prematura a informação de que não poderia haver gémeos.

- L - Vou fazer, se o mais velho tiver 12,  $y = z = 1$ . Se o mais velho tiver 11, etc....
- Já posso estar a fazer com esta informação de não haver gémeos?
- I - Ela tinha-a?
- L - Não...
- I - Lembra-te quando há bocado disseste que essa frase significava que ela ainda não tinha informação suficiente? Foi só depois que ela conseguiu chegar lá, não te podes esquecer disso, por isso não faz sentido começares por usar essa informação, não é?
- L - Ok, ok...
- I - Faz-te sentido, ou não?
- L - Faz, faz, muito sentido, agora percebi!

Após enumerar todas as possibilidades, tarefa que efetuou com relativa facilidade por apresentar alguma destreza no cálculo numérico, Luísa reforçou a ideia de que a senhora disse “só assim não chego lá” porque precisava de mais informação. No entanto, à semelhança do que aconteceu no início da resolução do desafio, não compreendeu que seria determinante calcular o produto em cada um dos casos. De facto, a aluna não colocou a hipótese de ver caso a caso, o que seria imperativo num desafio desta natureza. Depois da investigadora sugerir o cálculo dos diversos produtos, Luísa rapidamente chegou à conclusão que a senhora não tinha conseguido determinar a idade dos meninos porque existiam situações

em que os produtos eram iguais e, seguidamente, revelou ter compreendido o momento indicado para utilizar a informação da não existência de filhos gémeos.

I - Então, a senhora fez estes cálculos todos e a que conclusão é que chegou?

L - Não conseguia dar a resposta.

I - Em que condições é que, estando a olhar para o produto, não conseguiria dar a resposta?

L - Porque haviam 2 iguais! Porque haviam produtos iguais... Que são o 40, 40 e 72, 72! Ela disse que havia um do meio, ou seja, não há gémeos, posso eliminar quando eles têm idade iguais, ou seja, posso eliminar este 72. Pronto, 72 não é porque este também não dá!

I - E o outro?

L - Este também não dá! Esta é a idade dos filhos, um tem 8, outro tem 5 e outro tem 1. Ai meu deus...

#### 4.2.2. Desafio 2: Simpáticas, mas um pouco mentirosas

A aluna começou por fazer um esquema, como se apresenta na Figura 12. O facto deste ser intuitivo e de fácil interpretação visual, levou Luísa a chegar rapidamente a uma resposta. Depois de fazer o esquema, concluiu que tanto a Fátima como a Ana estavam a mentir, pois ambas tinham dito a mesma coisa, isto é, disseram ambas que foi a Clara. Uma vez que o professor referiu que apenas uma disse a verdade, elas não poderiam ter dito simultaneamente que foi a Clara, pelo que teriam de estar a mentir.

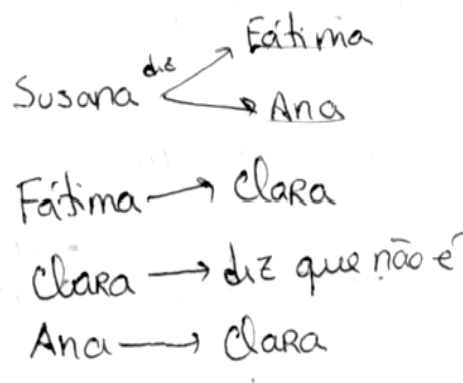


Figura 12: Esquema realizado por Luísa durante a resolução do Desafio 2.

É de realçar que a aluna fez confusão com o nome “Carla”, designando sempre por “Clara”. Posteriormente Luísa conclui que, como a Fátima e a Ana estavam a mentir, então o objeto não poderia ser da Clara, pelo que a Clara, ao dizer que não era dela, estava a dizer a verdade.

L - O professor disse que só uma é que tinha dito a verdade, as outras três mentiram. Como tanto a Fátima como a Ana dizem que foi a Clara, conclui-se que elas mentiram.

I - Porquê?

L - Porque só há uma que disse a verdade, e elas dizem a mesma coisa. Por isso... Elas mentiram, logo a Clara... Concluímos que a Clara não tem o objeto.

A aluna revelou grande facilidade nos vários raciocínios encadeados que foi realizando e acabou por concluir que a Susana estava a mentir, deduzindo que o objeto teria de ser dela.

L - Agora fica-se na dúvida, porque... A Clara diz que não tem o objeto, logo a Clara diz a verdade. Logo, a Susana também disse uma mentira. Diz que é da Fátima ou da Ana, logo a Susana é que tem o objeto. Ok, este foi mais fácil do que o outro!

#### 4.2.3. Desafio 3: Agente de recenseamento

Logo depois de ler o enunciado, Luísa considerou o desafio muito confuso e, embora tenha revelado um bom raciocínio lógico, baralhou-se um pouco quando as informações se acumularam, pelo que o seu discurso foi, por vezes, repetitivo, o que o tornou extenso. É importante realçar que, embora as informações possam ser traduzidas e abordadas matematicamente, a aluna não concretizou a sua resolução por essa via, embora essa seja, a sua abordagem na maioria das aulas. Tal como se verifica no diálogo a seguir apresentado, a investigadora apercebeu-se que a aluna estava a fazer uma suposição errada, ao considerar apenas os casos em que o casal era do mesmo tipo. Eventualmente o equívoco decorreu do facto de a primeira afirmação interpretada se referir a *ambos* os elementos do casal.

L - Se mentem sempre, em tudo o que dizem, então também mentem em tudo o que estão a dizer. Ah espere lá... Ah, que confusão! Se ele está a dizer que “ambos somos *falks*” e os *falks* mentem sempre, então os *falks* diriam que “ambos somos *verks*”. Então, mas depois dizendo que “ambos somos *falks*” eles também não podem ser *verks* que os *verks* dizem sempre a verdade, e diriam que somos *verks*... Então eu acho que não consigo saber.

I - Mas tu estás a considerar a hipótese de que o casal é do mesmo tipo, é isso?

L - Ah pois, sim... Ah pois, eu não me tinha lembrado disso. Pois, se o casal fosse igual era isso que eu pensava. Mas se ele diz que “ambos somos *falks*” ele pode estar a mentir. Ou seja, eles não podem os dois ser *falks* nem *verks*, por aquilo que eu já tinha dito. No caso do primeiro, do Pereira, então... Bem, vou passar para o próximo.

Perante alguma confusão inicial, a aluna decidiu avançar para o casal seguinte, mas ainda perguntou se, no caso de ser possível dar resposta, seria necessário dizer o tipo de cada um dos elementos do casal, ao que a investigadora respondeu afirmativamente. Depois de esclarecida esta questão e, ao lembrar-se que o que o senhor Pereira tinha dito não era verdade, rapidamente concluiu que ele teria de ser *falk* e a sua mulher *verk*.

L - Então, no Pereira, ambos são diferentes. É preciso escrever o porquê? É que eu já tinha dito. Um é *falk* e um é *verk*.

I - E consegues dizer quem é o quê?

L - Ah sim... Porque o Pereira está a dizer... Ah, calma... Sim, espere... Porque ele está a dizer que “ambos somos *falk*”, que é mentira, logo ele tem de ser *falk*. Ok. O Pereira é *falk* e a mulher é *verk*.

Luísa continuou o desafio e interpretou o que disse o senhor Oliveira. De início hesitou, embora seja visível que está a raciocinar corretamente.

A - Bom, se ele estiver a mentir, então... Ele está aqui a dizer que no mínimo um de nós é *falk*, ou seja, pode ser, um ou os dois. Se ele estiver a mentir, são os dois *verks*, o que não é verdade... Ah? Espere... Se ele estiver a mentir são os dois *verks*, mas se ele está a mentir não pode ser *verk*, mas... Ah, meu deus... Que confusão!

A investigadora acabou por incentivar Luísa a continuar o seu raciocínio, por perceber que esta estava apenas desconcentrada. Rapidamente a aluna conseguiu deduzir o tipo de cada um dos membros do casal, demonstrando toda a sua capacidade de raciocínio lógico-dedutivo.

I - Continua, estás a ir bem!

A - Se ele estivesse a mentir seriam os dois *verks*, o que não é possível, porque ele está a mentir. Ai meu deus, mas ele não é *verk*... Ah sim, é *verk* porque o que ele está a dizer é verdade! E a mulher é *falk*... Já está! O Oliveira é *verk* e a mulher é *falk*.

A aluna começou por analisar a frase dita pelo senhor Figueira, supondo que estaria a mentir. Ainda que um pouco hesitante quanto à sua resposta, concluiu que ele teria de ser *verk*. Durante o seu raciocínio, a investigadora percebeu que a aluna pensou corretamente na implicação intrínseca na frase, embora considere o seu valor lógico sem recorrer à abordagem da lógica formal. Luísa mostrou-se bastante insegura, mas quando a investigadora a incentivou a prosseguir com o seu raciocínio, esta acabou por chegar facilmente à resposta correta.

L - Oliveira (...). Se ele estiver a mentir, ele diria, que se eu sou um *verk* e a minha mulher é um *falk*. Mas, se ele estiver a mentir, ele não seria um *verk*, seria *falk*. Que confusão, meu Deus...

I - Logo...? O que é que concluis?

L - Espere, deixe-me pensar outra vez... Se ele estiver a mentir, ah pois... ele é *verk*, não é?!

I - Estás a afirmar que ele é *verk*?

L - Estou a afirmar... E depois com um ponto de interrogação a seguir.

I - Mas diz-me lá o que estás a pensar, estás a pensar bem!

L - Pois, mas agora já me perdi. Se ele estiver a mentir, ele diria “se eu sou um *verk* então a minha mulher é *falk*”, mas se ele estiver a mentir ele é *falk*, logo ele está a dizer a verdade. Logo, ele é *verk* e a mulher também é *verk*.

Relativamente ao casal Macieira, a aluna não revelou uma dificuldade acrescida comparativamente aos anteriores. É perceptível a qualidade do raciocínio da aluna ao longo do desafio. Assim, na última afirmação abordada, raciocina rapidamente e não comete qualquer erro.

L - Bom, se ele estiver a mentir, eles não são do mesmo tipo e se ele estiver a mentir, ele é *falk* e a mulher é *verk*. Se ele estiver a dizer a verdade, seriam ambos *verks*. Espere lá... Se ele estiver a mentir, eles são... Sim, ele está a mentir porque eles são de dois tipos diferentes e ele é *falk* porque ele está a mentir.

I - O quê? Repete lá...

L - Ele está a mentir porque eles são de tipos diferentes porque ele é *falk* por estar a mentir e ela é *verk*...

I - E se ele estiver a dizer a verdade?

L - Pois, ainda não tinha chegado a essa parte...

I - Já tinhas dito qualquer coisa sobre esse caso, não foi?

L - Se ele estiver a dizer a verdade, são os dois *verks*. Se ele estiver a mentir, ele é *falk* e ela é *verk*, ou seja, a mulher dele é *verk*, é a nossa certeza.

Devido ao facto de se ter esquecido que tinha a possibilidade de não saber exatamente o tipo de cada membro do casal, a aluna não deu de imediato a sua resposta. À semelhança do que já havia acontecido anteriormente, o facto dos problemas que habitualmente resolve terem sempre solução, acabou por fazer com que Luísa se esquecesse que isso pode não ser uma condição imperativa.

L - Pois, lá está se ele estiver a mentir ele é *falk*, se estiver a dizer a verdade é *verk*... Como é que eu sei que ele está a mentir?... Não sei!

I - Ou seja?

L - Ah, pois, ok... Posso dizer que não se sabe!  
 I - Podes! Estavas à procura de uma resposta?  
 L - Estava!  
 I - Porquê?  
 L - Porque me tinha esquecido que se podia dizer que não se sabe... Estava à procura se ele é *falk* ou *verk*. Já me tinha esquecido disso! Então, já está!

## 4.3. Demonstrações Algébricas

### 4.3.1. Demonstração 1: Quadrados Perfeitos

Depois de ler o enunciado e de pensar um pouco, Luísa afirmou que preferia recorrer a exemplos, justificando que seria complicado utilizar muitas letras. Apesar de mostrar preferência pela verificação da propriedade através de casos concretos, Luísa começou por traduzir o problema por meio de uma equação, tal como se verifica na Figura 13.

Seja  $x$  e  $y$  dois quadrados perfeitos  
 Se  $z = x + y$ , então  $2z = 2x + 2y$

Figura 13: Tradução simbólica do enunciado da Demonstração 1 por Luísa.

Nesta fase, a aluna apresentou uma grande dificuldade em interpretar corretamente o problema. Luísa afirmou que demonstrar a propriedade enunciada seria equivalente a demonstrar que o dobro de um quadrado perfeito também é um quadrado perfeito. Apenas entendeu que tal conjectura não é verdadeira quando recorreu a exemplos. Através da análise deste raciocínio, compreende-se que a aluna fez uma correspondência direta entre os termos  $x$  e  $2x$  e  $y$  e  $2y$ , o que a levou ao equívoco descrito.

L - Se  $x$  é um quadrado perfeito então o seu dobro é um quadrado perfeito. É isto que estou aqui a impor,  $y$  é um quadrado perfeito então  $2y$  também é um quadrado perfeito.

I - Será isso?

L - Se um número  $z$  pode ser escrito como a soma de dois quadrados perfeitos, sendo  $x$  e  $y$  os quadrados perfeitos, então o seu dobro também pode. Ou seja,  $2z$  também pode, também pode ser escrito como a soma de dois quadrados perfeitos.

(...)

L - Na minha cabeça, faz sentido que... Eu quero provar isto, que isto é a soma de dois quadrados perfeitos. E  $z$  é isto. Então o dobro disto, que é  $2z$ , também vai ser soma de dois quadrados perfeitos. Então, posso dar exemplos?

A aluna atribuiu valores às suas incógnitas, chegando à conclusão que a sua conjectura não é verdadeira. Porém, referiu que, mesmo que o exemplo verificasse a propriedade, tal não seria suficiente para demonstrar a sua validade, o que aparenta uma compreensão do conceito de generalização.

L - Exemplo: seja  $x = 9$  e  $y = 4$ . O  $z$  é  $9 + 4 = 13$ .  $2z$  vai ser 26. E a pergunta é se  $2z$  pode ser escrito como a soma de dois quadrados perfeitos. Logo, 26 vai ser igual a... Ah sim,  $18 + 8$ . E o 18 é  $9 \times 2$ .

I - Mas o 18 é um quadrado perfeito?

L - Não! Pois, era aí que eu queria chegar, se o dobro do quadrado perfeito é quadrado perfeito... Se eu podia concluir isto!

I - Arranjaste um contraexemplo, mas imagina que encontravas um exemplo que até funcionava?

L - Não significava que era sempre.

Luísa procurou, para o seu exemplo (Figura 14), os quadrados perfeitos cuja soma perfizesse 26. Como não conseguiu concretizar de imediato esta tarefa, fez uma “lista de quadrados perfeitos”, que iniciou no quatro (omitindo o um). Depois de pensar um pouco, a aluna confirmou com a investigadora se um também seria um quadrado perfeito, pois, nesse caso, já teria chegado à conclusão que  $26 = 25 + 1$ . O facto de pensar que um poderia não ser um quadrado perfeito levou-a a hesitar relativamente à solução encontrada, o que transmite pouco conhecimento relativamente ao conceito de quadrado perfeito.

$$\begin{aligned} \text{Seja } x &= 9 \text{ e } y = 4 \\ z &= 9 + 4 = 13 \\ 2z &= 26 & 26 &= 18 + 8 \\ 26 &= 25 + 1 \end{aligned}$$

Figura 14: Exemplos realizados por Luísa no início da resolução da Demonstração 1.

Após explorar este exemplo, a aluna tentou encontrar alguma regularidade, ou seja, tentou universalizar a propriedade encontrada para todos os números, conjecturando que seria sempre possível ter a soma de um quadrado perfeito com um e obter um quadrado perfeito. Porém, quando verificou que isso não seria verdade no caso do quarenta, uma vez que trinta e nove não é um quadrado perfeito, procurou um novo exemplo. Novamente, a aluna conseguiu utilizar um exemplo para atestar a falsidade da sua conjectura através de um exemplo. Na verdade, percebe-se através do seu discurso que procura nos exemplos um padrão, por forma a construir uma conjectura.

L - Logo, conseguimos provar por um exemplo que... O dobro da soma de dois quadrados perfeitos também é a soma de dois quadrados perfeitos. Mas tivemos um exemplo, não sei se se pode tornar universal! Ah, sim... Pode-se tornar universal. O 1 é um quadrado perfeito. E se fosse por exemplo, 40, em vez de 26. Podia ser sempre 1 mais um número anterior que fosse quadrado perfeito. Não, mas neste caso era 39 e 39 não é. Então só funciona para alguns casos... Hum... Vou dar outros  $x$  e  $y$ , agora...

Luísa explorou, então, um novo exemplo  $25 = 16 + 9$ . Rapidamente chegou à conclusão que o dobro de 25 é 50 e que  $50 = 49 + 1$ . Este exemplo fê-la voltar à sua conjectura anterior, uma vez que encontrou novamente o número um como um dos termos. Assim, reformulou-a dizendo que “a soma de quadrados perfeitos dá um certo número, cujo dobro desse número menos 1 dá sempre um quadrado perfeito” e, através de outro exemplo, chegou novamente ao 40 e, desta vez, já verificou que  $40 = 36 + 4$ , o que invalidou a sua conjectura. Verifica-se, por parte da aluna, uma forte recorrência a exemplos, de modo a verificar ou refutar uma conjectura.

L – (...) Então, na minha cabeça, há uma regra. A soma de quadrados perfeitos dá um certo número, cujo dobro desse número menos 1 dá sempre um quadrado perfeito.

I - É como é que sabes que dá sempre um quadrado perfeito?

L - Porque... Vi nos dois casos e fazendo mais alguns de cabeça também me dá sempre. Por exemplo, se eu puser  $x = 4$  e o  $y = 16$ . Teremos  $z = 20$ . Ah, acho que agora já não, porque  $2z = 40$ . E 40 será igual a  $36 + 4$ . Ah ok, então já não vai dar... Então isto tinha sido uma coincidência muito boa. Até agora todos os casos têm dado. Mas o que eu estou a tentar arranjar uma regra universal para todos os casos. Eu posso estar aqui a fazer para todos os casos, mas isso não adianta de nada, por isso...

Assim, a aluna constatou que, de facto, a propriedade seria válida para todos os casos verificados, mas que o processo adotado não lhe permitia demonstrar a sua veracidade, pelo que tentou regressar à equação que formulou inicialmente. Ou seja, retomou uma abordagem mais abstrata e algébrica, quando se apercebeu da dificuldade de verificar o padrão empiricamente.

Luísa, ao passar para linguagem simbólica, revelou alguma dificuldade em simplificar a notação, sendo que a própria afirma precisar de muitas letras. Isto decorreu do facto de considerar algumas variáveis desnecessárias, por exemplo,  $z = x + y$ , sendo  $x$  e  $y$  quadrados perfeitos, e  $2z = a + b$ , sendo  $a$  e  $b$  quadrados perfeitos. É importante realçar que a aluna teve o cuidado de utilizar incógnitas diferentes, referido que seria necessário uma vez que “os números” não seriam necessariamente iguais. Estas afirmações revelam que a aluna distinguiu perfeitamente os objetos matemáticos considerados e o valor que as incógnitas podiam assumir.

L - Então  $z = x + y$ . Sejam  $x, y$  quadrados perfeitos. Tenho de arranjar mais letras, porque estes números vão ser diferentes. Mais  $a, b$  quadrados perfeitos. Se isto, então  $2z = a + b$ .

I - No fundo, o que é que queres provar em relação a  $a$  e  $b$ ?

L - Que são quadrados perfeitos. Então, se são quadrados perfeitos e um quadrado perfeito é o quadrado de um número inteiro não negativo, logo, o  $a$  tem de ser igual a um número elevado a 2... Mais letras! Posso não por aqui o  $x$  e o  $y$ ? E o  $b$  tem de ser um número  $y$  elevado a 2, não têm de ser os mesmos...

No entanto, Luísa revelou não conseguir desenvolver a expressão que escreveu e regressou à suposição inicial, ou seja, à tentativa de demonstrar que o dobro de um quadrado perfeito também é um quadrado perfeito. A aluna ainda não tinha compreendido que a hipótese que levantara era falsa.

L - Logo, eu quero provar. Lá está, parece esta coisa inicial. Quero provar que o dobro destes quadrados perfeitos são estes quadrados perfeitos... Não sei se vou chegar a algum lado.

I - Porquê?

L - Porque me está a parecer estranho...

Luísa tentou, através de manipulações algébricas, desenvolver a expressão inicial. No entanto, ao obter  $x^2 + y^2 = \frac{x_1^2 + y_1^2}{2}$  considerou que já estava demonstrado, ao aplicar novamente a sua hipótese, caindo num argumento circular. A aluna acabou por entender que o que havia feito não permitia demonstrar a propriedade, mas assumiu não conseguir fazer mais nada.

Retomando a expressão inicial  $2z = 2x^2 + 2y^2$ , pensou como poderia associar esta ao binómio de Newton ou ao triângulo de Pascal, sabendo que tinha de encontrar uma forma de fazer desaparecer o

coeficiente 2. No entanto, quando a investigadora sugeriu que tentasse desenvolver a expressão  $2x^2 + 2y^2$ , Luísa revelou muita dificuldade. Tentou sempre procurar conhecimentos de matemática escolar, mas revelou muita insegurança quando a investigadora sugeriu que eram apenas necessários conhecimentos a nível do ensino básico.

I - E se tentasses desenvolver esta soma  $[2x^2 + 2y^2]$ ?

L - Eu estou a pensar várias formas no meu cérebro, mas não há nenhuma que me leve a algum lado.

I - Mas no que é que estás a pensar? Para percebermos se isso te pode levar a algum lado ou não.

L - O dois tem de desaparecer, vá... Para estar aqui alguma coisa que esteja elevada ao quadrado. Para o dois desaparecer...

(...)

I - Como é que podes escrever, por exemplo, o  $2x^2$ ?

L - Eu já não me lembro dessas coisas que nós demos, do binómio de Newton e isso.

I - Não te preocupes que não precisas de coisas muito elaboradas, só precisas de conhecimentos do ensino básico.

L - Ai... Ainda pior!

I - Então, como é que podes reescrever  $2x^2$  para tirar daí o 2?

L - Não sei, não estou mesmo a ver...

Depois de algum tempo, a investigadora acabou por dar um exemplo mais simples, para que a aluna desbloqueasse. No entanto, não foi imediata a resposta por parte da aluna, continuando a manifestar alguma dificuldade em lidar com as duas operações intrínsecas na expressão  $2x^2$ , o que não ocorreu no exemplo da investigadora (a expressão  $2x$ ), que apenas tinha associada uma operação.

I - Como é que se pode transformar, por exemplo,  $2x$  numa soma?

L - Hum...  $x + x$ .

I - Exatamente! Então como é que transformas  $2x^2$  numa soma?

L - Então é  $x$  mais  $x$  vezes  $x$ .

I - Escreve lá isso.

L - Que estupidez.... É  $x^2 + x^2$ . Opá a sério... Que burra!

A investigadora questionou a aluna relativamente ao que a expressão a faria lembrar, mas não conseguiu obter nenhuma resposta segura. A aluna fez novamente alusão ao teorema de Pitágoras e ao Binómio de Newton. Depois da referência ao Binómio de Newton, a investigadora explorou um pouco essa ideia, conseguindo que a aluna desenvolvesse o caso notável  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ . De facto, a aluna apenas reconheceu a expressão enquanto caso notável quando a investigadora a questionou relativamente ao conteúdo do ensino básico que estaria ali a ser considerado. Intuitivamente, Luísa reconheceu que teria de construir dois casos notáveis na sua expressão.

I - Como aplicarias o Binómio de Newton?

L - Não sei, só me lembrei do Binómio de Newton porque o  $x$  e o  $y$  estão ao quadrado.

I - Então, de acordo com a fórmula que deste na aula, aí o  $n$  é quanto?

L - Dois.

I - Então escreve lá aí o que terias de ter nesse caso.

L - Então  $(x + y)^2$ .

I - E como é que poderás desenvolver isso?

L -  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ . Eu tenho isto  $[x^2]$  e tenho isto  $[y^2]$ .

I - Então não tens isto  $[2xy]$ .

L - Exato, não tenho isso.



A investigadora sugeriu que reorganizasse as parcelas da expressão de modo a construir os dois casos notáveis. Esta começou por pensar construir os dois casos notáveis à custa de  $x$  e  $y$ , mas, por achar que isso seria “o mais óbvio” a fazer, acabou por tentar fazer um dos casos notáveis com o  $x$  e o outro com  $y$ . Rapidamente se apercebeu que faria mais sentido continuar com a sua ideia inicial. Ao confrontá-la com outro caso notável que conhecesse, Luísa acabou por escrever a diferença de quadrados, embora tivesse começado por escrever o quadrado da diferença, que era o pretendido no caso. Esta questão revelou alguma confusão relativamente à designação dos casos notáveis, tal como se constata no seguinte diálogo:

- I - E se te tentares lembrar de outro caso notável?  
L - Hum, outro? Diferença de quadrados...  
I - E o quadrado da diferença, lembraste? Foi o que começaste por tentar escrever, mas depois acabaste por escrever a diferença de quadrados...

Depois disto, Luísa rapidamente compreendeu como se concluía a demonstração. A terminar, considerou que estava convencida com a demonstração, mas afirmou que não abdicaria de confirmar a propriedade com um ou dois exemplos, o que revela que a aluna não ficou convencida com o caráter demonstrativo da sua prova.

- L - Já está, agora, corta, corta! E temos aqui dois quadrados perfeitos, que vão ser o  $(x + y)^2$  e o  $(x - y)^2$ .  
I - O que é que te parece?  
L - Que descobrimos!  
I - Estás convencida? Não precisamos de fazer mais nada?  
L - Sim, estou convencida...  
I - Sentes necessidade de confirmar isto com algum exemplo?  
(...)  
L - Sim, se estivesse sozinha depois iria ver com uns dois ou três exemplos para ver se isto se verifica. É o que vou fazer então...

#### 4.3.2. Demonstração 2: Números Primos

Assim que terminou de ler o enunciado, Luísa fez uma questão que considerou pouco inteligente e pediu a “lista dos números primos”. Quando confrontada com a definição de números primos, referiu que já não se lembrava. No entanto, quando a investigadora disse “os números primos são números que só têm dois divisores...”, recordou-se da definição e começou a escrever os primeiros seis números primos (2, 3, 5, 7, 11, 13). Logo de seguida, teve também necessidade de confirmar o que são múltiplos. Confessou, ainda, que tem alguma dificuldade em distinguir e memorizar conceitos como “múltiplo de”, “divisor de”, e “número primo”:

- I - E os múltiplos de 6, sabes quais são?  
L - Também ia perguntar isso, que vergonha! Os múltiplos de 6 são... O 2, 3...  
I - Não, esses são os divisores.  
L - Ah, ok. Então os múltiplos de 6... Não sei!  
I - Sabes sim! Diz-me lá...  
L - São o 6, 12, 18...  
I - Exato!  
L - Eu nunca decorei estas coisas!

A aluna rapidamente identificou as duas exceções dos números primos em causa, o dois e o três, e compreendeu o que era preciso demonstrar, mas não encontrou uma forma de o fazer. Pelo caminho, considerou que os números primos seriam todos os números ímpares a partir de cinco, mas, ao pensar no número nove, rapidamente entendeu que a sua conjectura não seria verdadeira, o que revela que a aluna compreendeu que basta um contraexemplo para abandonar uma conjectura.

L - Os números primos podem ser todos os números ímpares a partir de cinco?

I - Não sei, diz-me tu.

L - Não, não, acabei de ver que não são.

I - Como é que acabaste de ver?

L - Porque o nove é um número ímpar e não é primo. Os números primos são todos os números que só têm dois divisores, ele próprio e o um...

Equacionou, então, algebricamente o problema e perguntou se havia alguma expressão que representasse os números primos, ao que a investigadora respondeu negativamente. Como não encontrava nenhuma forma de desenvolver a equação que escreveu, decidiu atribuir alguns valores à variável  $x$ . Ainda que tivesse verificado a equação para alguns casos, mostrou-se muito dependente da abordagem mais formal e matemática, pelo que apresentou uma enorme dificuldade em encontrar uma via para a demonstração através da equação (Figura 15).

Seja  $n \in \mathbb{N}$   
 Seja  $x$  um  $n$ -º primo  $\geq 5$   $6n = \text{Múltiplos de } 6 = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$   
 $x = 6n + 1 \vee x = 6n - 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{6} = n \vee \frac{x+1}{6} = n$   
 Ex  $x$   $x=5, n=1$   
 $x=7, n=1$   
 $x=13, n=2$

Queremos provar que existe  $n \in \mathbb{N}$ :  
 $\frac{x-1}{6} = n \vee \frac{x+1}{6} = n$   
 sendo  $x$  um número primo

Figura 15: Tradução simbólica e concretização de alguns exemplos de Luísa na Demonstração 2.

Ao constatar o impasse da aluna, a investigadora sugeriu que tentasse demonstrar o resultado por redução ao absurdo, técnica que a aluna apenas conheceu nesse momento. Rapidamente a aluna percebeu como deveria aplicar a estratégia, o que revelou uma rápida capacidade de aprendizagem e uma boa capacidade lógica, ao negar facilmente a sua tese.

I - Em que é que consiste negar a tua tese?

L - Dizer que os números primos não estão um número abaixo ou um número acima de um múltiplo de 6.

I - E isso quer dizer o quê?

L - Se não estão um número abaixo ou um número acima de um múltiplo de 6, podem estar dois números abaixo ou dois números acima.

I - Ou...

L - Ou mais...

I - Exato, tens de considerar todas as outras!

L - Dois ou mais, exato!

Compreendida a técnica de demonstração, faltava entender de que forma a iria colocar em prática. Esta demonstração foi resolvida com relativa facilidade, embora a aluna tentasse sempre recorrer a exemplos. Apesar disso, depois de escrever corretamente a justificação para dois números acima ou dois números abaixo de um múltiplo de seis, a aluna generalizou a sua ideia para todos os pares,

indicando que não seria possível somar ou subtrair números pares, pois iriam ser sempre números pares, pelo que não seriam primos. Isto revela que a aluna, embora parta de exemplos concretos, consegue abstrair-se e considerar um caso mais geral, tal como se percebe do diálogo seguinte:

- L - E agora, como é que eu provo que isto é absurdo?  
I - Agora tens de ver, tal como disseste, porque é que não podem estar dois abaixo ou dois acima de um múltiplo de seis?  
L - Não podem, encontro logo um contraexemplo para isso, mas como é que eu provo que isto é absurdo?  
I - Então, pensa lá, porque é que não poderá estar?  
L - Ah, não posso, porque são números primos! E se tivesse dois abaixo ou dois acima de um múltiplo de seis, que são pares, seriam pares, logo não seriam primos.  
(...)  
I - Mas até agora só provaste porque é que não podia estar dois números abaixo ou dois números acima. Ainda tens de provar para todos os outros!  
L - Exato, agora tenho de provar para os outros... Já sabemos que para números pares, não pode ser. Porque se tirarmos dois, ou quatro. Ou acrescentarmos quatro, é sempre a mesma coisa. Então aqui posso substituir o dois por pares?

Quando a investigadora a confrontou com a necessidade de demonstrar para os pares superiores a quatro, esta entendeu facilmente que o caso em que se somava ou subtraía seis unidades era desnecessário, mas não compreendeu de imediato que os restantes casos eram repetições dos anteriores. Inicialmente considerou que não era possível, pois se subtraísse a seis uma quantidade superior iria obter um número negativo, o que revela que a aluna poderia estar a interpretar mal a disjunção presente na proposição “...um número acima ou um número abaixo de um múltiplo de 6”. Além disso, o “raciocínio cíclico” inerente a este desafio apresentou algum constrangimento durante a sua resolução.

- L - Ah, para o seis não faz muito sentido, porque os múltiplos de seis são seis, doze, dezoito. Se eu tirar ou acrescentar seis vão ser sempre múltiplos de seis...  
I - E precisas de ver para mais oito ou menos oito?  
L - Ah... Não pode ser superior a seis, porque se tirar oito a seis fica um número negativo.

A aluna apenas começou a compreender um pouco melhor o que acontece para os números pares superiores a seis, quando a investigadora a incentivou a raciocinar de modo análogo ao caso em que somava e subtraía seis. Por momentos, confundiu aquilo que queria demonstrar, isto é, considerou que a um múltiplo de seis, somando e subtraindo três, iria obter, necessariamente, um número primo, o que corresponde à recíproca da propriedade em questão. Ao abordar porque não funcionava para três números abaixo ou acima de um múltiplo de seis, Luísa percebe que ao somar e subtrair três aos múltiplos de seis, obtém múltiplos de três, que não podem ser números primos:

- L - (...) Mas como nós queremos provar que somando ou subtraindo três a um múltiplo de seis o  $x$  é sempre primo, basta arranjar um contraexemplo para provar que isso não se verifica, não é? O dezoito é um múltiplo de seis e  $18 + 3 = 21$ , que não é um número primo.  
I - Será exatamente isso que queres provar? Experimenta lá aos múltiplos de seis somares ou subtraíres três.  
L - Porque três é um divisor de seis.  
I - Ou seja? Se eu ao seis subtraír três, o que obtenho?  
L - Três.  
I - Se eu ao doze subtraír três?  
L - Nove. Sempre múltiplos de três.

- I - Se são sempre múltiplos de três, podem ser primos?  
 L - Não. Eu tinha isso na cabeça, mas pensava que era um disparate!

Quando confrontada com os casos em que se somava ou subtraía cinco, a aluna socorreu-se novamente de exemplos para verificar a condição. Sentiu alguma dificuldade quando percebeu que a propriedade era válida para todos os exemplos que considerou, não encontrando uma justificação para tal acontecer. Além disso, a aluna esclareceu, implicitamente, se o operador lógico do enunciado seria uma disjunção, o que comprovou a sua dificuldade na interpretação, que já foi referida.

- L - Isto na minha mente está sempre a dar-me números primos...  
 I - Então o enunciado está errado? Estará aí alguma coisa errada?  
 L - Uma pergunta, isto de estar um número acima ou abaixo... Pode-se se usar ou isto  $[6n - 5]$  ou isto  $[6n + 5]$ ? Se isto  $[6n - 5]$  não fizer sentido pode usar-se isto  $[6n + 5]$ , não há problema?  
 I - Exato!  
 L - Pois, o que eu estava a pensar era “Ah se subtrairmos cinco a seis fica um e esse não é primo, mas se somarmos cinco [a seis] fica onze e esse é primo”.  
 I - Então será que o enunciado está errado?  
 L - Não, não está... Wow, é que estão a dar-me mesmo todos números primos!

A investigadora percebeu que a aluna não estava a conseguir compreender a justificação, o que aconteceu, provavelmente, pelo facto de ter verificado diversos casos e de não ter conseguido encontrar nenhum contraexemplo, como aconteceu anteriormente. A investigadora incitou-a a experimentar somar e subtrair cinco aos múltiplos de seis e a verificar a “distância” a que se encontravam os valores obtidos dos múltiplos de seis mais próximos. Luísa conseguiu compreender que este caso recaía sobre o caso em que se somava e subtraía um aos múltiplos de seis, que era o que se queria demonstrar.

### 4.3.3. Demonstração 3: Produto

Ao iniciar a proposta, a aluna mostrou alguma insegurança e falta de confiança perante as demonstrações, por não conseguir encontrar uma forma de demonstrar propriedades em que não conheça, à partida, as matérias envolvidas.

- L - Ai minha nossa senhora.  
 I - O que é que se passa? Porquê essa reação?  
 L - Porque eu já sei que isto não vai ser bonito, porque estas demonstrações assim, com números e divisores, e coisas assim, nós nunca as fizemos. Coisas deste género, nunca fizemos na nossa vida. Nunca nos pedem para fazer demonstrações assim sem saber a matéria, então é muito mais complicado para nós lembrarmos de uma forma de demonstrar.

No entanto, a aluna foi motivada pela investigadora, que lhe disse que ajudaria se fosse necessário. Tal como normalmente acontece, não revelou dificuldade em traduziu corretamente o problema por meio de uma equação, que está representada na Figura 16.

$$\text{Seja } n \in \mathbb{N} \\ \frac{n \times (n+1) \times (n+2)}{6} = k \quad k \in \mathbb{N}$$

Figura 16: Tradução simbólica do enunciado da Demonstração 3 por Luísa.

Seguidamente ponderou desenvolver a equação, mas de imediato desistiu da ideia, justificando que iria obter uma equação cúbica e não iria conseguir desenvolver para além disso. Compreende-se que a aluna tem uma forte competência de manipulação algébrica e um bom sentido crítico. Luísa mostrou-se, mais uma vez, insegura e pouco confiante com a concretização da demonstração. Apesar disso, decidiu verificar a propriedade para um exemplo concreto.

L - Posso resolver para ver se chego a algum lado?

I - Fazes o que quiseres!

L - 'Tá bem! Eu vou fazer a única coisa que eu sei. Ah, não... Isto vai dar uma cúbica... Meu Deus, não vale a pena, nunca vou sair daqui!

L - Deixe-me só arranjar um exemplo para eu ver isto....

Depois de ver um exemplo, considerou novamente que não iria conseguir efetuar a demonstração. Tentou lembrar-se de algumas técnicas que tinha utilizado nas últimas sessões e procurou, ainda, semelhanças entre a equação que tinha obtido e matérias abordadas em aula, considerando que pudesse estar envolvido o conceito de fatorial ou de arranjo, por exemplo. É visível a tentativa constante de utilizar a matemática escolar. A investigadora aconselhou-a a concentrar-se num caminho simples, pensando na condição para que um número fosse divisível por seis. Como a aluna não conhecia nenhuma condição, a investigadora sugeriu que observasse os divisíveis por seis, de forma a tentar encontrar a condição referida.

I - Não te esqueças que podes dizer o que quiseres, mesmo que te pareça absurdo...

L - Ok... Eu estava-me a lembrar de coisas que eu já tivesse visto, coisas parecidas com  $n \times (n + 1) \times (n + 2)$ , a única coisa que me lembrei foi do fatorial, de um arranjo de  $n$ ...

I - Tenta não pensar numa coisa tão elaborada. Coisas mais simples... Consegues lembrar-te de alguma condição para que um número seja divisível por seis? Uma condição que seja equivalente...

Durante a exploração desta questão, a aluna mencionou que os números divisíveis por seis são os números que pertencem à tabulada do seis e, quando a investigadora a questionou relativamente ao que se observa nos números divisível por seis, referiu que “vão de seis em seis”. Embora a investigadora a tenha motivado, referindo que a última observação era importante para a resolução da demonstração, Luísa não conseguiu encontrar as condições para que um número fosse múltiplo de seis. Este facto mostra algumas falhas na construção do conceito de divisor de um número.

A investigadora incentivou-a a pensar porque é que os três números naturais considerados teriam de ser consecutivos. A aluna referiu que não estava a refletir sobre essa questão, mas sim sobre porque é que teriam de ser três e não poderiam ser, por exemplo, quatro. Para esta questão, Luísa considerou que se fossem quatro números naturais consecutivos já não iria funcionar e que bastaria encontrar um contraexemplo para o justificar. Como não o conseguiu encontrar, concluiu que não deveria ser possível para quatro números, embora não tivesse compreendido imediatamente a justificação para tal. Após compreender que, de facto, seria possível para quatro números naturais consecutivos, conseguiu generalizar e justificar que se verifica para um produto superior a três números.

I - Mas qual é a conclusão que tiras daí?

L - Então, que sabendo que isto é verdade basta multiplicar pelos números que nós quisermos que vai dar sempre um número divisor de seis...

I - Então, o que não pode acontecer é o quê?

L - É que seja menos de três...

Luísa pensou demonstrar a propriedade por redução ao absurdo, ou seja, começou por dizer que para um número não havia garantia que fosse divisível por seis, pois nem todos os números são divisíveis por seis. Também com dois números consecutivos só haveria alguns casos em que era possível. A aluna exemplificou nos dois casos – na Figura 17 estão dois exemplos em que era possível dividir por 6 (à esquerda) e um exemplo em que não era possível (à direita).

$$\frac{2 \times 3}{6} = 1 \quad \frac{3 \times 4}{6} = 2 \quad \frac{4 \times 5}{6} = \frac{20}{6}$$

Figura 17: Exemplos considerados por Luísa durante a resolução da Demonstração 3.

Seguidamente, a investigadora questionou-a sobre as diferenças dos dois casos encontrados, tendo esta respondido que a diferença estaria na presença do fator dois ou três no produto do numerador. Entretanto a aluna lembrou-se que, ao ter uma sequência de três números naturais consecutivos, iria sempre “de três em três”, por isso teria sempre um divisor de seis, uma vez que três é divisor de seis.

Neste raciocínio a aluna considerou que isso apenas era garantido pelo fator três. Nesse sentido, a investigadora sugeriu que escrevesse uma sequência que incluísse o fator nove. A aluna não encontrou de imediato a justificação para que aquele produto fosse divisível por seis, o que revelou que ainda não tinha compreendido a justificação.

I - Então estás a querer dizer que basta o facto de ir de três em três para garantires que é divisível por três? Imagina que na tua sequência de três números consecutivos “apanhavas” o nove, o nove não é divisível por seis. Tenta fazer uma sequência que incluía o nove.

L -  $7 \times 8 \times 9$

I - Porque é que dizes que este número vai dividir o seis?

L - Porque nove vai ser... É um múltiplo de três... Eu não sei essas coisas!

I - Sim, é um múltiplo de três, mas isso garante que isso seja divisível por seis?

L - Na minha cabeça sim.

Luísa sabia que o facto de o produto ter um fator divisível por três seria relevante para demonstrar que seria divisível por seis, pelo que sugeriu dividir por três. No entanto, a sua afirmação era apenas intuitiva, não tendo conseguido de imediato encontrar uma justificação. Em seguida, também verificou que daria para dividir por dois, uma vez que o produto seria sempre par. Luísa não apresentou grande dificuldade em concluir que ao multiplicar três números naturais consecutivos um deles será múltiplo de três, ou seja, será divisível por três. Além disso, também concluiu que o produto seria um número par, pelo que teria de ser divisível por dois, tal como apresenta na sua resposta final (Figura 18).

se multiplicarmos 3 n.º consecutivos, um deles vai ser um múltiplo de 3, e se dividirmos esse múltiplo por 3 e o 6 (que está no denominador) também por 3, vai dar no numerador um produto de três números (um par e dois ímpares ou um ímpar e dois pares), cujo produto vai ser um número par, que é sempre divisível por 2, obtendo-se, assim, um n.º natural

Figura 18: Resposta dada por Luísa à Demonstração 3.

## 4.4. Decisões tomadas e dificuldades sentidas por Luísa

### 4.4.1. 1.<sup>a</sup> sessão: Desafio 1 + Demonstração 1

Na primeira sessão, Luísa escolheu como primeira proposta para resolver, a demonstração “Quadrados Perfeitos”, porque, nas suas palavras, lhe parecia “mais giro e mais matemático”. Deixou para segundo plano o desafio “Idades dos Meninos” por ser de interpretação e associar mais a questões de português.

No final da demonstração algébrica, a investigadora tentou compreender quais tinham sido as maiores dificuldades durante a sua resolução. A aluna confessou que o mais complicado tinha sido trabalhar com as incógnitas e lembrar-se de como poderia dar resposta à demonstração pedida.

I - O que foi mais difícil para ti?

L - O provar com letras. Fazer a demonstração em si. Porque é difícil lembrarmos dos casos notáveis quando estamos a fazer. É mais fácil provar com números.

I - Então, mas assim não estamos a demonstrar, não é? É só uma verificação.

L - Sim, exato, verificar que é verdade é fácil. A parte da demonstração com letras é mais complicado. Porque nem sempre nos lembramos de todas as maneiras de fazer. Mas depois de ver... Depois de ver normalmente lembramo-nos sempre. Mas, o fazermos por nós é mais difícil.

No final do desafio lógico, ainda antes da investigadora ter perguntado qualquer coisa, a aluna referiu que ambos tinham sido muito trabalhosos, mas que tinha gostado mais de resolver o desafio “Idades dos Meninos”, embora tenha dado mais trabalho e tenha sido mais cansativo.

A investigadora tentou compreender melhor a razão da preferência pelo desafio lógico em detrimento da demonstração algébrica. A dificuldade que a demonstração algébrica apresentava face ao desafio lógico, foi o facto de esta não ter nenhuma matéria intrínseca, o que levou Luísa a preferir o desafio “Idades dos Meninos”. Além disso, a aluna referiu que o facto de não ter autonomia na resolução de demonstrações em sala de aula a levaram a sentir mais dificuldades na resolução da demonstração “Quadrados Perfeitos”.

I - Porque é que gostaste mais?

L - Eu gosto mais deste tipo de exercício, em que nos dão pouca informação, porque conseguimos a partir da pouca informação que temos chegar a algum lado e esses são os exercícios que eu gosto de fazer. O dos quadrados perfeitos tinha demonstração e eu... Demonstrações eu nunca, nunca gostei muito de fazer. Aliás, nós nunca fizemos. Nunca fomos nós a tentar demonstrar as coisas, são sempre os professores, por isso quando nos pedem para sermos nós a demonstrar as coisas é sempre mais complicado. Assim, sem saber a matéria que nós temos de usar é mais complicado, por isso gostei mais do das idades dos meninos.

I - Mas aqui também não sabias o que poderias aplicar!

L - Sim, mas esta não havia nenhuma matéria para aplicar, era mais lógica...

I - Mas ainda assim preferiste começar pelo outro, porquê?

L - Eu li este [Idades dos meninos] e pensei “Oh meu Deus, não temos nada! É melhor começar por este [Quadrados Perfeitos]. Parece ser mais direto, é só fazer uma demonstração...”

#### 4.4.2. 2.<sup>a</sup> sessão: Desafio 2 + Demonstração 2

Na segunda sessão, Luísa optou por iniciar a sessão pelo desafio “Simpáticas, mas um pouco mentirosas”, por considerar que na última sessão tinha aprendido que o facto de ter muito texto não implicaria que fosse mais difícil, pelo que deixou a demonstração “Números Primos” para último, uma vez que lhe parecia mais difícil e com menos informação.

Assim que terminou a demonstração algébrica, a aluna rapidamente considerou que tinha sido a mais complicada de resolver. Opinião que, logo em seguida, se alterou, ao lembrar-se da demonstração algébrica da sessão anterior, “Quadrados Perfeitos”. Em comparação com esta, referiu que a demonstração “Números Primos” apresentava mais informação, o que a ajudava a encontrar um caminho para a resolução, referido que “consequimos fazer pelo menos uma equaçãozinha...”. Além da dificuldade de encontrar uma estratégia de resolução, que ficou rapidamente compreendida depois da sugestão da investigadora para fazer uma demonstração por redução ao absurdo, a aluna considerou que o seu maior entrave residiu na justificação para números superiores a 4.

Relativamente a qual dos dois desafios realizados na sessão em causa tinha gostado mais de resolver, Luísa começou por dizer que tinha sido o primeiro desafio, “Simpáticas, mas um pouco mentirosas”. No entanto, esta opinião inverteu-se, quando considerou que tinha aprendido mais com o desafio “Quadrados Perfeitos”, pelo que afirmou ter preferido resolver este.

#### 4.4.3. 3.<sup>a</sup> sessão: Desafio 3 + Demonstração 3

Na terceira sessão, Luísa começou pelo desafio “Agente de recenseamento”, justificando que pretendia começar pelo que consideraria ser mais fácil, isto é, “que não tenha uma demonstração matemática”, pois, para si, costuma demorar mais tempo e ser mais difícil.

Assim que terminou o desafio, a aluna referiu que tinha gostado, mas que era muito confuso, perdendo-se, muitas vezes, nos raciocínios que estava a fazer. Relativamente ao caso que teve mais dificuldade, Luísa nomeou o último (Macieira) como o mais difícil, pois não se tinha lembrado que não precisava de chegar a uma resposta e estava sempre a tentar encontrar forma de o fazer.

Já no final da demonstração “Produto”, a aluna referiu que o mais complicado tinha sido fazer a demonstração, pois não conhecia previamente a matéria necessária para tal. Além disto, voltou a referir que não se sente suficientemente preparada para este tipo de situações, uma vez que não é confrontada em sala de aula com demonstrações em que não é dita a matéria que deverá ser aplicada. Apesar desta dificuldade diversas vezes apontada, considerou que tinha sido a demonstração mais fácil, em comparação com as realizadas nas sessões anteriores, mas afirmou não saber se seria mais fácil apenas por já ter realizado todas as outras.

L - É mesmo isso não se saber por onde pegar. Porque... Tal como eu já disse várias vezes, nós nunca fomos treinados a fazer demonstrações assim deste género, que é só... Demonstrar. Assim, teoremas que nós olhamos e pensamos “Ok, eu arranjo exemplos, mas como é que se demonstra mesmo?”. Nunca fizemos coisas



assim, é muito difícil chegar lá, assim, muito mesmo... Sozinha duvido que conseguisse chegar lá!

I - Mas eu não te disse nada, não foi? Só te orientei no sentido de...

L - Sim, acho que este foi o que me disse menos. Acho que este, de todos estes deste género de demonstrações, acho que foi o mais fácil. Mas como eu já tinha feito todos aqueles...

I - Achaste este o mais fácil de todos, mas ainda assim achaste difícil, foi?

L - Sim... E vou continuar sempre a achar que é difícil estas demonstrações tão...  
“Oh meu Deus, como é que eu pego nisto?”.

Quando a investigadora questionou Luísa relativamente àquele que tinha gostado mais de resolver, esta indicou que tinha sido a demonstração “Produto”, por ser mais desafiante e pelo seu carácter de inacessibilidade à maioria das pessoas, o que lhe faz ganhar mais confiança nela própria.

I - Então, sinceramente, gostaste mais de qual entre os dois?

L - Ok... Eu gostei mais deste!

I - Porquê?

L - Porque foi mais desafiante. E desta vez tive menos ajudas, por isso... Também... E saber que quase consegui chegar lá sozinha também me fez sentir bem. Senti-me melhor do que se chegasse a um destes. Por exemplo, sempre que fizemos exercícios deste género, mais de escrita de lógica, muitas pessoas conseguem fazer, mas agora pegar numa demonstração destas... Meu Deus... É muito mais complicado!

## 4.5. Síntese do Estudo de Caso: Luísa

Luísa começou a sua primeira sessão com preferência para a demonstração algébrica. No entanto, mudou a sua opinião nas sessões seguintes, por ter considerado a demonstração mais complicada. Nos desafios lógicos, a aluna mostrou alguma dificuldade em construir argumentos formais e lógicos, recorrendo, várias vezes, a justificações empíricas. Relativamente às demonstrações algébricas, a aluna revelou alguma dificuldade em encontrar métodos para a demonstração, referindo diversas vezes que não estava habituada a realizar demonstrações autonomamente, motivo que apontou para as suas dificuldades. Luísa demonstrou uma melhor compreensão das propriedades algébricas quando recorreu a exemplos.



## 5. Estudo de caso: Matilde

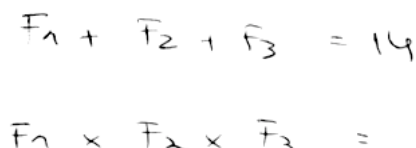
### 5.1. Caracterização de Matilde

Matilde é uma aluna de 17 anos, extremamente empenhada e organizada. Durante as aulas apresenta um comportamento exemplar e realiza sempre os trabalhos de casa. Estas características permitem à aluna colmatar algumas dificuldades na disciplina. Matilde preocupa-se muito em compreender os conteúdos da aula, mas é extremamente tímida, preferindo colocar as dúvidas individualmente à professora. Terminou o 10.º ano de escolaridade com 15 valores e o 11.º ano com 16 valores. Neste ano letivo, a aluna concluiu o 1.º período com 15 valores à disciplina, tendo obtido no 2.º período a mesma classificação. No futuro deseja seguir um curso no ensino superior relacionado com gestão hoteleira ou engenharia biomédica, mas realça que não gostaria de ter no curso muitas disciplinas de matemática.

### 5.2. Desafios lógicos

#### 5.2.1. Desafio 1: Idades dos Meninos

Matilde, ao ler pela primeira vez o desafio, riu-se e estranhou o facto de não ter acesso ao produto estampado na camisola da senhora, apontando este motivo para que não conseguisse pensar numa forma de chegar ao pretendido. Além disso, não encontrou relevância na última informação dada, de que o filho do meio estava em casa com gripe. Apesar disso, Matilde traduziu a informação do enunciado, tal como está representado na Figura 19.



The image shows two handwritten equations. The first equation is  $F_1 + F_2 + F_3 = 14$ . The second equation is  $F_1 \times F_2 \times F_3 =$  followed by a blank space.

Figura 19: Equação escrita por Matilde no Desafio 1.

Enquanto pensava numa estratégia de resolução, confirmou se o número estampado na camisola a que se faz referência no enunciado dizia respeito a um número ou a um algarismo. Trata-se de uma questão importante, pois se o número estampado na camisola fosse apenas um algarismo o desafio não teria solução.

Dado que a aluna referiu saber apenas que a soma das idades dos três meninos seria 14, a investigadora incentivou-a a prosseguir, uma vez que poderia excluir várias hipóteses com essa informação e enumerar todos os casos possíveis. Embora tivesse considerado que se tratavam de muitas situações, Matilde rapidamente conseguiu concluir que a idade máxima de um deles teria de ser 12 anos e chegar às restantes possibilidades. A sua estratégia passou por fixar a idade do mais velho e variar a idade dos restantes. Depois de todas as possibilidades consideradas para a idade fixada, reduzia 1 ano à idade do mais velho, e assim sucessivamente (Figura 20). Compreendeu que tinha de parar quando os

casos começaram a repetir os anteriores. Esta estratégia poderá ser justificada pela boa organização que caracteriza Matilde, visível, por exemplo, através do seu caderno diário e do seu material de estudo.

$$\begin{array}{rclcl}
 12 & - & 1 & = & 2 \times \\
 11 & - & 2 & - & 1 = 22 \times \\
 10 & - & 3 & - & 1 = 30 \times \\
 10 & - & 2 & - & 2 = 40 \times \times \\
 9 & & 4 & - & 1 = 36 \times \\
 9 & - & 3 & - & 2 = 54 \times \\
 8 & - & 5 & - & 1 = 40 \times \\
 8 & - & 4 & & 2 = 64 \times \\
 8 & & 3 & & 3 = 72 \times \\
 7 & & 6 & & 1 = 42 \times \\
 7 & - & 5 & - & 2 = 70 \times \\
 7 & - & 4 & - & 3 = 84 \times \\
 6 & - & 5 & - & 3 = 90 \times \\
 6 & - & 4 & - & 4 = 96 \times
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{rclcl}
 6 & - & 2 & - & 6 = 72 \times \\
 5 & - & 5 & - & 4 = 100 \times
 \end{array}$$

A idade dos rapazes  
é 8, 5 e 7 anos

Figura 20: Hipóteses das idades dos meninos enumeradas por Matilde no Desafio 1.

Quando a investigadora a questionou relativamente ao facto de a senhora não ter conseguido chegar a uma resposta quando olhou para o produto estampado na camisola, esta insistiu em justificações pouco lógicas, como a senhora não conseguir responder pelo facto de o número ser “grande”, o que a faria “perder-se” nos cálculos. Estas justificações indiciam uma tentativa de raciocinar de modo empírico, revelando que não compreendeu que se tratava de um desafio com um raciocínio intrínseco e lógico e que não exigia justificações empíricas.

I - (...) Há uma informação que é importante: é que ela olhou para o produto e não chegou a uma resposta. O que é que isso significa?

M - Pode ser um número grande.

I - E porque é que ela não chegaria à resposta se fosse um número grande?

M - Pode-se perder nos cálculos...

Em seguida, disse que o produto seria maior do que 14, uma vez que a soma seria 14. Quando a investigadora a questionou sobre a afirmação feita, esta refere o produto de alguns números é maior do que a soma desses números. Matilde percebe que a sua conjectura não é verificada em todas as situações ao ser confrontada com um exemplo. Embora tenha ficado convencida de que não se verifica em todos os casos, não se preocupou em analisar as situações em que seria verdade, o que poderá revelar pouco sentido crítico e curiosidade. De realçar ainda que a aluna não estava suficientemente atenta aos

casos que tinha acabado de enumerar, uma vez que todos eles somam 14, mas logo o primeiro exemplo tinha como produto 12.

M - O produto vai ser maior do que 14. Por isso, isso já vai excluir algumas hipóteses!

I - Mas aqui dizem-te alguma coisa sobre o produto ser maior ou menos que 14?

M - Não, mas eu acho que o produto vai ser maior do que 14...

I - Porquê?

M - Porque se fizermos um produto vai ser maior do que a soma...

I - De certeza?

M - Eu acho que sim!

I - Então, quanto é que é  $1 \times 1$ ?

M - É 1.

I - E quanto é que é  $1 + 1$ ?

M - É 2.

Matilde, incentivada pela investigadora, fez os produtos nos 16 casos que enumerou (confrontar na Figura 20), mas, em alguns cálculos, foi necessário recorrer ao algoritmo (escolar) da multiplicação, o que revela pouca competência no cálculo mental. Depois de terminada esta etapa, conseguiu perceber que todos os meninos teriam de ter idades diferentes, pelo facto de a senhora referir que o do meio ficou em casa. No entanto, utilizou essa informação demasiado cedo, isto é, começou a excluir os casos em que existiam duas idades repetidas, embora o desafio exigisse fazê-lo apenas depois de excluir os números que gerassem produtos iguais. Apesar disso, conseguiu compreender que a senhora disse “só assim não chego lá” por lhe faltar alguma informação, embora não tenha compreendido o que poderia estar em falta. Argumentou, ainda, que a senhora não conseguia responder ou porque não tinha as respostas à frente ou porque as “contas” não seriam “fáceis”. Novamente se verifica o recurso a justificações que indiciam o não entendimento do desafio e com alguma insistência na dificuldade do cálculo numérico por parte da senhora.

I - Tu estás a olhar para o meu número, não é? Se eu tiver aqui o número 22, tu consegues dizer a idade deles?

M - Sim.

I - Consegues, mas a senhora não conseguiu! Porque é que ela não conseguiu?

M - Porque não tinha as hipóteses à frente...

I - Mas vamos acreditar que ela sabia as hipóteses! Tu és a senhora e tens as hipóteses. Em que circunstâncias é que não conseguias decidir pelo número que está estampado na camisola? (...) Tu disseste-me que se tivesse aqui 22, conseguirias dizer. Nesse caso, um teria 11, outro 2 e o último 1 ano.

M - Porque é uma conta fácil...

Dada a permanência das dificuldades, a investigadora pediu-lhe que procurasse relações entre os números, ao que respondeu que todos os números obtidos seriam pares. Ao perceber que Matilde não estava a conseguir avançar, a investigadora acabou por dar exemplos de situações (ex.: o produto igual a 22 e 30) e questioná-la sobre a possibilidade da senhora chegar à idade dos meninos nessas circunstâncias. Mesmo com um acompanhamento no raciocínio, voltou à ideia de que teria de encontrar “contas fáceis”, o que revelou muita dificuldade em compreender a lógica do desafio: não ter informação suficiente para dar resposta ao problema seria sinónimo de haver dois produtos iguais. Mais uma vez faz referência à simplicidade do cálculo para a resposta da senhora.

I - 22 é uma possibilidade para o número estampado na camisola?

M - Não, porque se não ela chegava lá.  
 I - Então, e 30, por exemplo?  
 M - Também.  
 I - O que estás a ver agora?  
 M - Se... Ela chegaria lá.  
 I - E na prática, do que estás à procura?  
 M - De contas fáceis.

Continuando com muita dificuldade em compreender como chegar à resposta, é novamente auxiliada pela investigadora, que vai colocando algumas questões de modo a encaminhar o seu raciocínio. A aluna acaba por chegar à resposta do desafio e refere que lhe faz sentido a resposta a que chegaram. É de realçar toda a dificuldade sentida pela aluna até encontrar a resposta ao desafio.

I - (...) Se fosse 12, a senhora chegaria lá. Das possibilidades todas que ela tem, há algum caso em que seja 12 para além deste?  
 M - Não...  
 I - Então, o que é que acontece? Se não há mais nenhum caso em que seja 12, se eu vir um 12 estampado é porque os filhos têm de ter 12, 1 e 1.  
 M - Ah... Então, são mais difíceis de chegar lá!  
 I - Mais difíceis ou mesmo impossíveis, não é?  
 (...)  
 I - E então, já excluístes todos? Chegaste a alguma resposta?  
 M - Acho que sim...  
 I - Faz-te sentido a resposta?  
 M - Sim, sim.

### 5.2.2. Desafio 2: Simpáticas, mas um pouco mentirosas

Matilde manifestou grande facilidade a resolver o desafio em questão. Quando acabou de o ler, realizou um esquema com as principais informações dadas, que está representado na Figura 21. A primeira intuição fê-la considerar que o objeto seria da Carla, referindo que da Fátima não poderia ser porque tinha dito que era da Carla e a Ana disse que a Carla mentiu. Nesta altura, a aluna apercebeu-se que, como só uma poderia ter dito a verdade, então não podia ser da Carla.

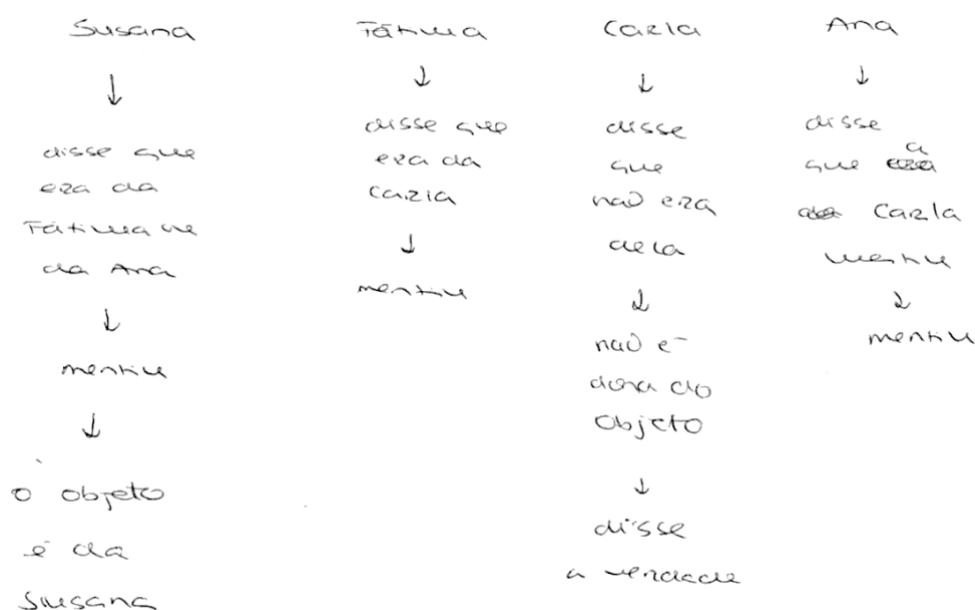


Figura 21: Resolução de Matilde do Desafio 2.

M - (...) Mas só uma é que disse a verdade, por isso não pode ser a Carla!  
 I - Porquê?  
 M - Porque, se tanto a Fátima como a Ana estão a dizer que foi a Carla, estariam as duas certas, mas o enunciado diz que só uma é que está certa.  
 I - Então a Carla não pode ser, é isso?  
 M - Hum, hum.

Matilde rapidamente compreendeu que o objeto teria de ser da Susana, uma vez que teria de ser a Susana a outra pessoa que mentiu, pois disse que o objeto era da Fátima ou da Ana. O esquema foi sendo completado ao longo da resolução.

### 5.2.3. Desafio 3: Agente de recenseamento

Ao ler o enunciado, Matilde confirmou o que significava recenseamento. Depois de esclarecida relativamente a esta questão, começou a sua resolução. Esquemáticamente transcreveu a informação do enunciado, como se mostra na Figura 22. A aluna demorou algum tempo a compreender o desafio, uma vez que tinha como premissa que as frases eram sempre verdadeiras, ou seja, considerou a frase como sendo independente do tipo (*verk* ou *falk*) do homem de cada casal, o que, obviamente, faz alterar o desafio.

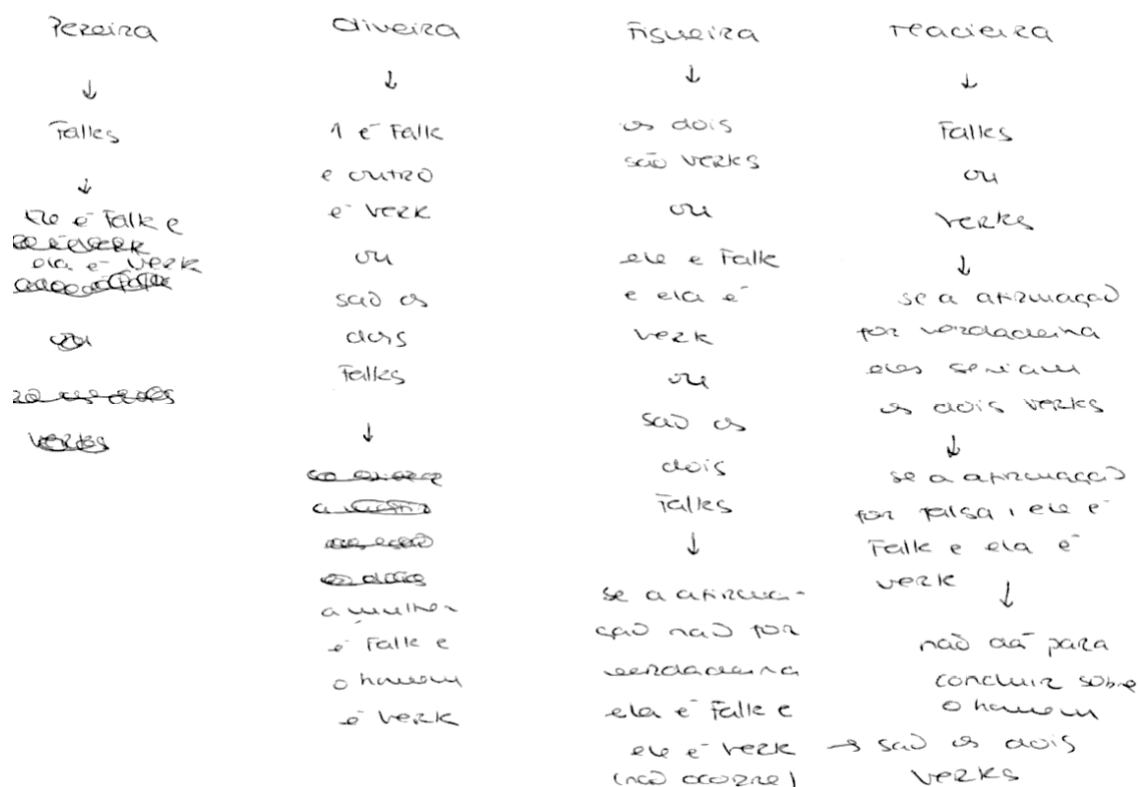


Figura 22: Esquema realizado por Matilde durante a resolução do Desafio 3.

Relativamente ao casal Pereira, Matilde começou por referir que “os Pereira disseram que eram *falk*”, ou seja, considerou que os elementos do casal tinham de ser do mesmo tipo. Em seguida, tal como

já foi referido, não compreendeu que a frase dita não era, necessariamente, verdadeira, uma vez que estava dependente do tipo do senhor Pereira.

Dado que o senhor Pereira, na sua afirmação, referiu “ambos somos *falks*”, erroneamente, considerou que ele teria dito apenas “sou *falk*”. Porém, a frase refere-se a ambos, pelo que não seria possível interpretar separadamente, pois, dessa forma, tal como aconteceu com Matilde, chega-se a um paradoxo. Uma vez que alguém do tipo *falk* não pode dizer que é *falk*. Do mesmo modo que alguém do tipo *verk*, não pode dizer que é *falk*.

M - Mas ele diz “ambos somos *falks*” então ele está a mentir, porque os *falks* mentem...

I - Tu estás a assumir que o que ele está a dizer é verdade, é isso?

M - Não... Ele está a dizer que é *falk*, por isso, se ele é *falk*, ele está a mentir. Se ele está a dizer que é *falk*, ele está a mentir, ou seja, isto não é verdadeiro.

Perante toda a confusão feita pela aluna, a investigadora tentou, inúmeras vezes, acompanhar o seu raciocínio, por forma a evitar que caísse no mesmo erro, mas esta repetiu-o.

I - Então, se ele é *falk* e está a dizer uma frase que é mentira, o que poderá significar a frase?

M - Têm de ser os dois *falks*... Não, pode ser ele *falk* e ela *falk* ou os dois *falks*... Não, só pode ser ela, porque...

I - Porque nesse caso a frase já seria verdadeira, não é? Então?

M - Ele é *falk* e ela é *verk*.

I - Exato...

M - Mas não faz sentido! Se ele está a dizer que ambos somos *falks*, está a dizer que ele é *falk* e os *falks* mentem, por isso, isto é mentira.

(...)

M - Então, eles têm de ser *verks*, mas os *verks* dizem sempre a verdade.

I - Mas ele está aqui a dizer “ambos somos *falks*” e o contrário disto não é “ambos somos *verks*”, percebes?

Embora tenha chegado à conclusão correta, revelou que esta continuava a não fazer sentido para si. Esta insistência prendeu-se com o facto de Matilde estar a interpretar mal a afirmação do senhor Pereira. A investigadora voltou a recorrer ao esquema elaborado pela aluna e conseguiu que esta percebesse o raciocínio que deveria fazer.

I - “Ambos somos *falks*”. Se isto é mentira, quais são as possibilidades? Tu disseste que tínhamos três possibilidades...

M - Podem ser os dois *verks*...

I - Um *falk* e um *verk* ou um *verk* e um *falk*... É o contrário do que tens aí, não é?

M - Sim...

I - Dessas três, tens de ver a única possibilidade, que é aquela em que ele é *falk*, mas a mulher não pode ser *falk* em simultâneo, pois assim a frase seria verdadeira.

Relativamente ao casal Oliveira, a aluna começou por referir que, se o senhor Oliveira fosse *falk*, a frase seria falsa, mas não teria forma de o saber. A investigadora incentivou-a a verificar se existia alguma situação em que chegasse a uma contradição, pois, caso tal acontecesse, já conseguiria dar a sua resposta.

M - Se isso for verdade, ele é *verk* e ela é *falk*.

I - Exatamente, isso é uma possibilidade. Agora supõe lá que ele é *falk*.

M - Se ele é *falk* isso é falso...

I - E se isto é falso?

M - Ela é *verk*...



(...)  
 I - Mas esse caso é possível?  
 M - Não sei...  
 I - Então estamos a supor que isto é mentira, ou seja, ele ser *falk*. Se não é verdade que “pelo menos um de nós é *falk*”, o que é que é verdade?  
 (...)  
 M - São os dois *verks*...  
 I - São os dois *verks*, ou seja, nenhum deles é *falk*?  
 M - Sim...  
 I - Então será possível ele estar a mentir? Porque se ele estiver a mentir em relação a isto o que é que tu dizes?  
 M - Que ele é *falk*...

Ao chegar a uma contradição, Matilde conseguiu perceber que a situação considerada não poderia ser verdadeira, pelo que restava apenas o caso em que ele é *verk* e ela é *falk*. A investigadora, no final, perguntou-lhe se faria sentido o raciocínio que havia sido feito, ao que esta respondeu afirmativamente.

I - Mas se ele está a mentir e diz isto, quer dizer que são os dois *verks*, mas isso é uma contradição, certo?  
 M - Sim...  
 I - Então, qual é a única hipótese que resta?  
 M - Ele estar a dizer a verdade...  
 I - E a mulher?  
 M - Falk...  
 I - Exato! Percebeste?  
 M - Sim.

No que diz respeito ao casal Figueira, a aluna começou por supor que o senhor Figueira seria *verk*. Em seguida, analisou as consequências se fosse *falk*. Neste momento, a investigadora aproveitou o esquema realizado, para chamar à atenção das três hipóteses que a frase traduz, considerando que é verdadeira, e questionou o que sucederia se não fosse. Na realidade, se a frase fosse falsa, ele teria de ser *verk* e ela *falk*, o que não era possível, pois para a frase ser falsa ele não poderia ser *verk*, uma vez que os *verks* dizem sempre a verdade. Matilde demorou algum tempo até dar a resposta, uma vez que não estava a analisar a implicação intrínseca na afirmação, mas sim as duas proposições isoladamente. Depois de compreender que não faria sentido a frase ser falsa, compreendeu que ele terá de ser *verk* e, consequentemente, a sua mulher também.

I - Ora, mas vê lá se essa frase faz sentido!  
 M - Não...  
 I - Porquê?  
 M - Porque se ele é *verk* ele disse a verdade aqui...  
 I - Exatamente! Ou seja, este caso não pode acontecer, por isso a frase tem de ser necessariamente...  
 M - Verdadeira!  
 I - Ou seja?  
 M - São os dois *verks*.

O casal Macieira foi o que causou menos confusão à aluna. Esta começou por estudar as duas possibilidades para a frase (ser verdadeira ou falsa) e rapidamente compreendeu que não daria para concluir o tipo do senhor Macieira, apenas seria possível concluir relativamente à sua mulher. O facto de não existir uma solução “exata” não apresentou um entrave para Matilde.

M - São do mesmo tipo... Se a afirmação for verdadeira, eles são *verks*.

I - Não podem ser os dois *falks*?  
M - Não.  
I - Porquê?  
M - Porque assim estariam a mentir.  
(...)  
I - Então e se a afirmação for falsa?  
M - Se a afirmação for falsa, as pessoas podem ter tipos diferentes.  
I - Então quais poderão ser as possibilidades?  
M - Se a afirmação for falsa, ele é *falk* e a mulher é *verk*.  
I - Qual é a conclusão em relação ao casal Macieira?  
M - Não dá para concluir.  
I - Mas dá para concluir qualquer coisa sobre um deles...  
M - Ela, que é *verk*.

## 5.3. Demonstrações algébricas

### 5.3.1. Demonstração 1: Quadrados Perfeitos

Assim que leu o enunciado, Matilde referiu não ter o entendido. Deste modo, a investigadora leu-o em voz alta e explicou-lhe, por outras palavras, o que se pretendia. Acrescentou que, embora não fosse necessário, poderia pensar num caso concreto, se considerasse que a faria entender melhor a propriedade. Seguindo a sugestão, a aluna utilizou os exemplos representados na Figura 23.

M - Eu não percebo o enunciado...  
(...)  
I - Sabes o que é um quadrado perfeito? O 4, tal como está aí na nota, é um quadrado perfeito. Dá-me o exemplo de outro quadrado perfeito.  
M - O 9.  
I - Exato! O 9 resulta de elevar 3 ao quadro, não é? O que eu te digo no enunciado é que se eu consigo escrever um número qualquer como a soma de dois quadrados perfeitos então também posso escrever o seu dobro. Se for mais simples para ti, tenta encontrar um exemplo. Não é necessário, mas pode ajudar-te a perceber...

The figure shows handwritten mathematical examples in two columns. The left column contains:  $4 + 4 = 8$ ,  $2 \times 8 = 16 \rightarrow 4^2$ , and  $6 = 4^2 + 0^2$ . The right column contains:  $9 + 16 = 25$ ,  $25 \times 2 = 50$ , and  $50 = 5^2 + 5^2$ .

Figura 23: Exemplos realizados por Matilde durante a resolução da Demonstração 1.

Matilde não encontrou de imediato os quadrados perfeitos que somados iriam resultar em 16. Apenas após a sugestão da investigadora, para que lesse mais atentamente a nota deixada no enunciado, percebeu que estava a tomar “número inteiro não negativo” como sinónimo de “número positivo”, pelo que não estava a considerar o zero como uma possibilidade para uma das parcelas. Depois de esclarecida, rapidamente encontrou a resposta ao que pretendia.

M - O 16 não dá...  
I - Não dá, porquê?

M - Porque, para ser soma de dois, tem de ser abaixo do 16. E quadrados perfeitos abaixo do 16 há o 1, o 4 e o 9. E  $9 + 4 = 13$  e  $9 + 1 = 10$  e  $4 + 1 = 5$  e só pode ser [a soma] de dois.

I - Qual é a definição de quadrado perfeito que tens aí escrita? Vê lá com atenção...  
O quadrado perfeito é o quadrado de um número...?

M - Positivo.

I - Aí é que está o problema, aí não diz positivo. Diz que é um número inteiro não negativo. Ou seja, podes considerar o zero como um quadrado perfeito, certo?

Quando a investigadora lhe pediu que demonstrasse a propriedade para um caso geral, Matilde perguntou de que forma o poderia fazer, referindo que nunca foi “muito boa” a realizar propostas em que se pedisse para mostrar uma propriedade num caso geral. O receio da aluna perante a demonstração já tinha sido revelado no início da sessão, ao deixar a resolução da demonstração para segunda escolha e ao relatar que não gostava muito de demonstrações.

I - Exatamente! Então, tu verificaste isto para dois casos, agora o que se pretende é que proves para números quaisquer, sem particularizares...

M - Como é que eu faço isso?

I - Como é que em matemática tentamos mostrar qualquer coisa num caso geral?

M - Não sei, nunca fui muito boa nestas coisas...

Por sugestão da investigadora, a aluna traduziu a informação do enunciado matematicamente. Porém, tal como é visível na Figura 24, Matilde não utilizou uma linguagem muito formal na forma como apresentou as informações, utilizando uma notação relativamente simples para traduzir uma parte do enunciado.

Handwritten text:  $x \rightarrow n^2$  que pode ser escrito como a soma de 2 quadrados perfeitos

$$a^2 + b^2 = x$$

Figura 24: Equação escrita por Matilde durante a realização da Demonstração 1.

Logo depois de escrever a equação representada acima, hesitou relativamente ao que tinha escrito, pois, como representou os quadrados perfeitos com letras diferentes, considerou que estes tinham valores diferentes, acrescentando que tal não era possível porque podia ser o mesmo valor. Esta afirmação revela que a aluna não tem um noção correta destes objetos matemáticos. Depois da investigadora a ter esclarecido quando às variáveis com letras diferentes poderem, ou não, representar números diferentes, a aluna rapidamente escreveu  $2x$  em função de  $a$  e  $b$ . No entanto, não conseguiu desenvolver no sentido correto, tendo escrito  $2a^2 + 2b^2$  sem qualquer ideia para prosseguir a demonstração, tal como se vê na Figura 25.

$$2x = x + x = a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = 2a^2 + 2b^2$$

Figura 25: Desenvolvimento da expressão de Matilde durante a realização da Demonstração 1.

Quando a investigadora lhe perguntou ao que associava a expressão  $a^2 + b^2 + a^2 + b^2$ , esta rapidamente respondeu “casos notáveis, mas...”. É de salientar que a aluna respondeu de imediato que se tratava de um caso notável. Como forma de compreender o que a aluna estava a pensar, a investigadora perguntou-lhe porque tinha dito “mas...”, ao que esta respondeu que faltava “qualquer coisa” para se tratarem de casos notáveis.

Assim, a investigadora incentivou-a a acrescentar e retirar o que fosse necessário para construir os casos notáveis que pretendia. Matilde rapidamente referiu que tinha de somar  $2ab$ , duas vezes, e, para compensar, subtrair  $2ab$ , também duas vezes. A investigadora pediu que escrevesse os casos notáveis em que estaria a pensar. Nesse momento, escreveu o *quadrado da soma* e, quando questionada se apenas precisaria desse, escreveu o *quadrado da diferença*, referindo que, desse modo, bastaria somar  $2ab$  e subtrair a mesma quantidade, não precisando de o fazer duas vezes, o que revela alguma segurança sobre este tópico e uma boa noção das manipulações algébricas necessárias para a construção de quadrados perfeitos. A resolução da aluna encontra-se representada na Figura 26.

$$2x = a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab + a^2 + b^2 - 2ab \\ = (a+b)^2 + (a-b)^2$$

Figura 26: Resposta de Matilde à Demonstração 1.

No final do desafio, Matilde não identificou de imediato  $(a + b)^2$  e  $(a - b)^2$  como quadrados perfeitos. Para contornar este impasse da aluna, a investigadora recorreu a exemplos para que esta compreendesse que os objetos em causa se tratavam de quadrados perfeitos. De imediato a aluna entendeu o que era pretendido, o que revela que o recurso a casos concretos facilitou a sua compreensão.

- I - Este número aqui é um quadrado perfeito?  
M - Não sei...  
I - Escreve lá  $3^2$ . É um quadrado perfeito?  
M - Sim.  
I - Agora escreve lá, por exemplo,  $(4 + 1)^2$ . Esse número é um quadrado perfeito?  
M - Sim...  
I - Porquê?  
M - Porque  $5^2$  é um quadrado perfeito.  
I - Então, qualquer número inteiro ao quadrado é um quadrado perfeito, não é?  
M - Sim...  
I - Então, isto  $[(a + b)^2]$  é um quadrado perfeito, não é?  
M - Sim...  
I - E isto  $[(a - b)^2]$ ?  
M - Também...  
I - Então, o que é que concluímos? O dobro de um número que pode ser escrito como a soma de dois quadrados perfeitos...  
M - Também pode ser escrito dessa forma.

A investigadora auscultou a aluna para saber a necessidade que sentia em verificar para mais exemplos, tendo esta aludido à utilização de “letras” para demonstrar a propriedade. Deste modo, referiu que não era preciso concretizar mais exemplos para estar convencida.

### 5.3.2. Demonstração 2: Números Primos

Assim que leu o enunciado, Matilde questionou a investigadora relativamente à definição de múltiplos de 6. A investigadora disse-lhe que são os números que se obtêm da multiplicação de um número inteiro por 6, ao que esta respondeu de imediato “tipo a tabuada?”. A sua resposta revela que, embora de forma pouco formal, poderá ter recordado o conceito. No entanto, logo manifestou não saber o que fazer para demonstrar a propriedade, pelo que foi incentivada pela investigadora a raciocinar e partilhar as suas ideias, pois nenhuma delas seria absurda.

Começou a fazer alguns exemplos, justificando que estaria só a tentar “confirmar” a propriedade. Pelo facto de estar a verificar que os múltiplos de seis estão entre dois números primos, compreende-se que está a interpretar de forma errada a propriedade enunciada na demonstração. No entanto, ao encontrar uma “contradição”, com o número vinte e quatro, já não prosseguiu mais. Na verdade o enunciado refere que “qualquer número primo está um número abaixo ou um número acima de um múltiplo de seis” e a aluna interpreta que “qualquer múltiplo de seis está entre dois números primos”, o que evidencia a sua interpretação errada.

M - Eu só estou a tentar confirmar isto.

I - Estás a confirmar que é verdade?

M - É.

I - Diz-me lá porquê!

M - Então, o seis está entre dois números primos, o cinco e o sete, são ambos números primos. O doze a mesma coisa, está entre o onze e o treze. O dezoito também está entre o dezassete e o dezanove. O vinte e quatro já não dá, porque está entre o vinte e três e o vinte e cinco e o vinte e cinco não é um número primo.

Dada a aparente contradição do enunciado, a aluna considerou que o vinte e quatro seria uma das exceções referidas no enunciado. Perante este equívoco, a investigadora sugeriu que tentasse ler o enunciado novamente e percebesse ao que se referiam as exceções. Embora tenha compreendido que as exceções diziam respeito aos números primos, não conseguiu, de imediato, dizer quais seriam.

M - Mas é suposto explicar as exceções ou os outros?

I - Quais são as exceções?

M - Eu vi agora. São o... vinte e quatro...

I - Lê lá melhor o enunciado: “todos os números primos, com duas exceções...”.

As exceções são relativamente ao quê?

M - Aos números primos.

Possivelmente por ter começado a interpretar mal o enunciado, a aluna bloqueou e demorou algum tempo a compreender o que estaria errado no seu raciocínio. Perante este bloqueio, a investigadora voltou a convidá-la para uma leitura mais cuidada, de modo a tentar interpretar corretamente o enunciado. Apenas numa terceira tentativa foi possível obter as respostas corretas relativamente às exceções: o dois e três. As justificações apresentadas pela aluna não são matematicamente válidas para demonstrar o pretendido, uma vez que refere que as exceções seriam o dois e o três, porque serem inferiores a seis. No entanto não pensou no caso do cinco, que é inferior a seis, mas não se trata de uma exceção..

I - Quais é que são os dois primos que não verificam a propriedade?  
M - O dois e o três.  
I - Porquê?  
M - Porque é os múltiplos de seis. Porque os múltiplos de seis começam em seis.  
I - Ou seja?  
M - E dois e três é menor do que seis.  
I - Mas o cinco também é menor que seis.  
M - Mas não tem um intervalo tão grande.  
I - Explica lá isso melhor, mas é essa a ideia.  
M - Então, porque aqui só diz um número acima ou abaixo e o três está três números abaixo do primeiro múltiplo de seis.  
I - Exatamente!

Estando justificadas as exceções, faltava verificar porque motivo é que os primos têm de estar um número abaixo ou um número acima de um múltiplo de seis. Matilde referiu que os múltiplos de seis são pares, os números primos são ímpares e entre números pares há dois números ímpares. A aluna representou aquilo que dissera através de um esquema, tal como na Figura 27.

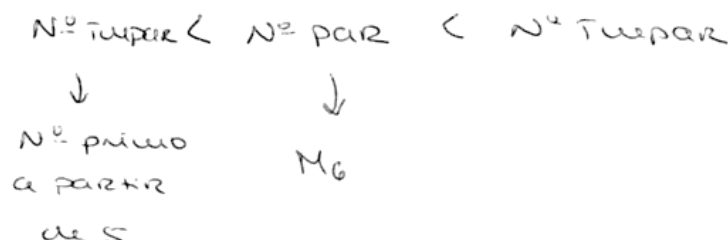


Figura 27: Representação de Matilde durante a realização da Demonstração 2.

As afirmações feitas relativamente aos exemplos que considerou, nomeadamente o facto de os números primos serem ímpares (já considerando que o 2 é uma exceção) ou o facto de existir um par entre dois ímpares, não a levaram a nenhuma conclusão lógica, pelo que acabou por abandoná-las. A compreensão da generalização da propriedade poderá ter sido influenciada por a aluna estar demasiado fixada nos exemplos concretizados.

I - (...) Agora, porque é que os primos têm de estar, necessariamente, um número abaixo ou um número acima de um múltiplo de seis?  
M - Os números primos são ímpares, menos o dois. E os múltiplos de seis são pares...  
I - Todos?  
M - Sim... Acho eu...  
I - É verdade, e isso prova...?  
M - Então um número par está entre um número ímpar e um número ímpar.  
(...)  
M - Os números pares que aqui se vão por são múltiplos de seis. E depois verifica-se...  
I - Mas porquê?  
M - Verifiquei porque vi por tentativas...  
I - Ok... Mas isso não prova para todos!  
M - Não sei explicar...

Apesar de não conseguir encontrar um encadeamento lógico para as afirmações que fizera, Matilde tentou enquadrar os múltiplos de seis entre dois números primos. É de referir que a aluna, pela expressão que escreveu (ver Figura 27), considerou que os números ímpares eram primos, mas quando

a investigadora a confrontou com um contraexemplo (o nove), esta compreendeu. Embora já tivesse sido feita referência, realçou-se novamente que o que se queria demonstrar não era que os múltiplos de seis estão entre dois primos. Na realidade, isto revela não apenas que a aluna não conseguiu interpretar corretamente a disjunção implícita na frase, mas também na implicação correspondente. Foi necessária mais uma leitura para que ficasse totalmente esclarecida. Depois de estar consciente da sua interpretação, escreveu-a na forma de implicação (Figura 28).

se é primo  $\Rightarrow$  n° acima ou abaixo de 176

Figura 28: Tradução simbólica do enunciado da Demonstração 2.

- M - Por exemplo, se eu tiver  $x - 1 < x < x + 1$ , acho que se verifica.  
 I - O teu  $x$  é um múltiplo de seis, é isso?  
 M - Sim...  
 I - Mas o que tu estás a pensar é que os teus múltiplos de seis estão entre dois primos?  
 M - Sim.  
 I - Mas não é isso que se quer ver, certo?  
 M - Então não sei...  
 I - Tu queres é ver, se ele é primo... O que é que tem de acontecer? Tem de ser um número abaixo ou um número acima de um múltiplo de seis, certo?  
 M - É uma implicação?  
 I - Hum, hum...

Como não compreendeu como demonstrar, a investigadora sugeriu que considerasse um número primo que não verificasse a condição, isto é, que não estivesse um número acima ou abaixo de um múltiplo de seis. Rapidamente referiu que, nesse caso, a implicação seria falsa. Assim, o seu objetivo seria demonstrar que a implicação não poderia ser falsa, pelo que seria necessário verificar que situações poderiam ocorrer se um certo número primo não estivesse um número acima ou abaixo de um múltiplo de seis. A partir deste momento, conseguiu desenvolver o seu raciocínio, embora tenha tido um discurso pouco fluente quando lhe foi perguntado porque é que dois números abaixo ou acima de um múltiplo de seis são números pares. No entanto, compreende-se que a aluna percebeu onde se pretendia chegar e que conseguia dominar os conceitos de primo e múltiplo.

- I - Imagina que não estaria um número abaixo ou um número acima de um múltiplo de seis, então onde poderia estar?  
 M - Dois números abaixo ou dois números acima de um múltiplo de seis.  
 I - Por exemplo. Agora tenta lá provar porque é que isso não pode acontecer!  
 M - Porque assim seria par.  
 I - Porquê?  
 M - Seria um número par porque os números primos são números ímpares e (...)  
 Não, se estiver dois abaixo de um múltiplo de seis vai ser par!  
 I - E se é par?  
 M - Não é um número primo.  
 I - Exatamente! Porque o único número primo que é par é...?  
 M - É o dois.

Após compreender a justificação no caso de dois números abaixo ou acima de um múltiplo de seis, Matilde tentou generalizar o seu raciocínio para quatro e depois para qualquer número par. Quando

a investigadora a confrontou sobre a necessidade de demonstrar para os pares superiores a quatro, esta entendeu que o caso em que se somava ou subtraía seis unidades, era desnecessário. Já nos restantes, considerou que não seria possível, porque se subtraísse a seis (primeiro múltiplo de seis considerado) uma quantidade superior iria obter um número negativo, o que revela que a aluna poderia estar a interpretar mal a disjunção implícita no enunciado. Além disso, o “raciocínio cíclico” implícito neste desafio apresentou algum constrangimento durante a sua resolução.

M - Então também não pode estar quatro números abaixo.

I - Ora aí está!

M - Não pode estar  $x$  números acima ou abaixo de um múltiplo de seis, sendo  $x$  um número par.

I - Porquê?

M - Porque daria sempre um número par.

I - O que é que poderia ser esse  $x$ ? Que valores é que pode tomar o  $x$ ?

M - Dois, quatro, seis, oito...


I - Será que toma o valor seis e o oito?

M - Não, porque depois podia dar negativos...

I - Vamos imaginar que era 6 números abaixo ou acima de um múltiplo de 6, o que é que isso significa?

M - Seis... Daria um número... Não sei... Daria um múltiplo de 6.

Em seguida Matilde justificou porque não poderia estar três números acima ou abaixo de um múltiplo de três. Embora inicialmente apenas tivesse referido que os números obtidos seriam ímpares, o que por si só não justifica a propriedade, acabou por referir que todos os números obtidos são múltiplos de três e que o único múltiplo de três primo é o próprio. É de notar que tirou esta conclusão depois de ter recorrido a alguns exemplos, tal como se verifica na Figura 29.



$$\begin{array}{l} 12 - 3 = 9 \\ 18 - 3 = 15 \\ 24 - 3 = 21 \end{array}$$

Figura 29: Exemplos ilustrados por Matilde durante a resolução da Demonstração 2.

Quando foi questionada relativamente ao motivo de os múltiplos de três não poderem ser primos, apresentou alguma hesitação. Dado saber a resposta, a sua hesitação prendeu-se na forma de se expressar, o que revelou não estar muito confortável com a comunicação de conceitos matemáticos.

I - E os múltiplos de três não podem ser primos?

M - Só o três.

I - Exato, porquê?

M - Porque se divide por ele próprio e por um.

I - Exato, e porque é que os outros múltiplos de três não podem ser primos?

M - Não sei...

I - Sabes sim! O que é um número primo?

M - É um número que se divide por ele próprio e por um.

I - E por mais algum?

M - Não.

(...)

I - Então se for múltiplo de três o que é que acontece?

M - Divide-se por três números.

I - Divide-se pelo menos por três números, não é? Então já não pode ser primo?

M - Sim.



Quando iniciou a justificação de cinco números acima ou abaixo de um múltiplo de seis, começou por referir que iria obter números pares. Na verdade, a aluna estava a somar e subtrair aos números primos, em vez de o fazer aos múltiplos de seis. Ao assumir que “estava a olhar ao contrário”, a aluna reformulou o que dissera e chegou à conclusão que obteve números ímpares. Novamente com base nos exemplos, confirmou que era possível e não se apercebeu que as suas justificações não comprovavam o que se pretendia, pois, nesse caso, não era suficiente obter números ímpares, mas sim números primos. Assim, mais uma vez, confundiu os conceitos de “primo” e “ímpar”.

Ao concretizar alguns exemplos, a investigadora percebeu que Matilde estava, novamente, a olhar para a disjunção implícita na frase como sendo uma conjunção, o que afetava a forma como interpretava os resultados obtidos, referindo numa primeira análise que não era possível, tal como se comprova no diálogo a seguir transcrito.

M - Então tenho de fazer  $7+5$  ou  $7-5$ .

I - Por exemplo, no caso do sete. Tens de ver que o sete tem de resultar de um múltiplo de 6 mais cinco ou menos cinco.

M - Ah, não resulta... Porque o dois não é um múltiplo de seis.

I - E faz lá  $7+5$ .

M - Isso já resulta, já é um múltiplo de seis.

I - Então é abaixo ou acima. Não é abaixo e acima.

M - Então o enunciado está errado, porque o cinco também pode. Mesmo que seja só acima.

I - Também pode ser abaixo, no nosso exemplo é que tinha de ser abaixo.

Depois de compreender que bastava ser cinco unidades abaixo ou acima de um múltiplo de seis, e não necessariamente ambas, e confirmar que funcionava para os exemplos que tinha encontrado, voltou a considerar que o enunciado estava incorreto. Dado que não conseguiu libertar-se desta convicção, a investigadora sugeriu que pensasse num caso concreto e arranjasse o múltiplo de seis que estivesse cinco unidades acima ou abaixo e, seguidamente, tentasse perceber se isso contradizia o enunciado da demonstração. A aluna entendeu que, neste caso, para além de estar cinco unidades abaixo, também estava uma unidade acima. Facilmente generalizou para os outros casos.

I - Então coloca lá aí um caso concreto que esteja cinco acima ou cinco abaixo. Procura um primo e mostra qual é o múltiplo de 6 que ele está cinco acima ou abaixo.

(...)

M -  $7+5$  dá doze e doze é um múltiplo de seis.

I - Mas o exemplo do sete contradiz o enunciado? Deverão estar um número acima ou abaixo de um múltiplo de seis.

M - Não...

I - Porquê?

M - Está cinco números abaixo de um múltiplo de seis, mas também está acima de um múltiplo de seis. Mas também está acima de múltiplo de seis.

I - Qual?

M - De um.

No final, a aluna acabou por compreender que não seria necessário verificar para números superiores a seis, uma vez que iria coincidir com os casos anteriores, compreendendo assim a conclusão da demonstração da propriedade.

### 5.3.3. Demonstração 3: Produto

Ao ler o desafio, Matilde perguntou se “ser divisível por seis” é “ter de dar um número inteiro?”. Depois de estar esclarecida, começou por considerar três números, genéricos, e concretizar o seu produto. No entanto, como obteve uma expressão de grau três, não continuou o seu raciocínio referindo que não conseguia fazer mais nada. Como não conseguia avançar, questionou se poderia “provar com exemplos concretos”. A investigadora explicou que poderia experimentar, verificar, mas que isso não lhe permitia demonstrar. Há uma evidência clara de abandonar a abstração e prender-se a uma resolução mais concreta. (Figuras 30 e 31).

$$a, a+1, a+2$$

$$\begin{aligned} a(a+1)(a+2) &= a(a^2+2a+a+2) = a^3+2a^2+a^2+2a = \\ &= a^3+3a^2+2a \end{aligned}$$

Figura 30: Tradução simbólica e manipulação algébrica realizada por Matilde na Demonstração 3.

$$\begin{array}{ccc} 1 \times 2 \times 3 = 6 & 4 \times 5 \times 6 = 120 & 3 \times 4 \times 5 = 60 \\ \frac{6}{6} = 1 & \frac{120}{6} = 20 & \frac{60}{6} = 10 \end{array}$$

Figura 31: Exemplos de Matilde durante a resolução da Demonstração 3.

Ao concluir que a propriedade se verificava para os três exemplos acima apresentados, a aluna foi incentivada a demonstrar a propriedade para qualquer sequência de três naturais consecutivos. Depois de dizer que não sabia como o fazer, a investigadora sugeriu-lhe que olhasse para os seus exemplos e tentasse perceber porque é que seriam divisíveis por 6, tarefa que a aluna não conseguiu realizar, por não saber as condições que um número teria de satisfazer para ser divisível por 6. Além disso, a aluna referiu-se a “divisor de”, quando queria dizer “divisível por”, pelo que se percebe que a aluna confunde as designações referidas.

I - Então e agora como é que podes provar que isso é verdade para quaisquer números naturais consecutivos?

M - Não sei...

I - Tenta olhar para os teus exemplos, porque é que será que é divisível por 6. O que é que tens de ver para ver se um número é divisível por 6?

M - Dar um número inteiro...

I - E porque é que o produto destes três números é divisível por 6?

M - Porque devem fazer parte do mesmo grupo, de múltiplos ou divisores, não sei!

I - Como assim? Explica lá melhor isso!

M - Então, se o 120 for um divisor de 6 vai dar um número inteiro... E o 6 também é divisível por 6.

I - Tem de dar um múltiplo de 6, é isso?

M - Ok, sim...

I - Mas porque é que o produto de três números naturais consecutivos dá um múltiplo de 6? É aí que queres chegar...

M - Não sei.

A investigadora incentiva Matilde a pensar porque é que se considera o produto de três naturais consecutivos, ao invés de dois, por exemplo. Recorrendo a um dos exemplos, refere que, no caso  $2 \times 3$ , continuaria a verificar-se. A investigadora alertou que o mesmo já não acontece quando se considera, por exemplo,  $1 \times 2$  ou  $4 \times 5$ . A aluna contrapõe que no caso de ser  $5 \times 6$  já se verifica a divisibilidade por seis. Neste momento, conseguiu intuir que seria sempre possível, desde que existisse um número que, de certo modo, estivesse relacionado com o 6. No entanto, ainda não tinha compreendido perfeitamente que relação seria essa.

M - Não, se escolhesse o quatro e o cinco não era, mas se escolhesse o cinco e o seis era, porque tem lá um seis.

I - Então, tem de ter seis? Consegues arranjar algum exemplo em que não incluas o seis?

M - Consigo, mas tem de ter um número relacionado com o seis...

I - O que é que significa ter um número relacionado com o seis?

(...)

I - Então e onde é que aí está o múltiplo de seis?

M - É o sessenta...

I - Mas olhando para o produto dos números, onde é que podes encontrar o múltiplo de seis?

M - Está o doze...

I - Exato!

Convém realçar que, embora a aluna tenha considerado a presença do fator 12 ( $3 \times 4$ ), não conseguiu lidar com a manipulação de operações e a decomposição em fatores, pelo que não identificou o fator 6 ( $3 \times 2$ ). Apesar disso, quando a investigadora chamou à atenção para esta decomposição, rapidamente compreendeu o que se pretendia e conseguiu aplicar ao exemplo sugerido pela investigadora, tal como se verifica na Figura 32.

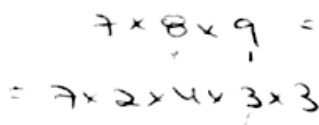

$$7 \times 8 \times 9 =$$
$$= 7 \times 2 \times 4 \times 3 \times 3$$

Figura 32: Exemplo concretizado por Matilde durante a resolução da Demonstração 3.

Com auxílio da investigadora, acabou por perceber de que forma conseguia decompor os seus números para evidenciar o fator seis na multiplicação e, desse modo, demonstrar a divisibilidade por seis. Porém, faltava ainda garantir a existência do fator seis. Quando questionada relativamente aos fatores que dariam origem ao seis, a aluna rapidamente concluiu que seriam o dois e o três. No processo de compreensão da origem destes fatores, a investigadora sugeriu que os sublinhasse nos exemplos. A aluna conseguiu compreender que teria de os ir “procurar” aos respetivos múltiplos, no entanto referiu-se aos múltiplos como “divisores”, pelo que, novamente, confundiu as designações dos conceitos. Já depois disto, Matilde não compreendeu como poderia garantir a existência dos fatores dois e três na

multiplicação. Insistentemente referiu não saber como demonstrar, o que revela a sua falta de confiança, tal como é visível no excerto seguinte.

I - E como é que podes garantir que numa sequência de 3 naturais consecutivos tens sempre múltiplos de 2 e múltiplos de 3? Não tenhas medo de dizer disparates!

M - Mas eu não sei...

I - Sabes sim!

M - Não sei não...

Na verdade, após algum encorajamento da investigadora, a aluna acabou por justificar corretamente o que era pretendido, o que demonstra que, possivelmente, estava apenas com receio de dizer algo absurdo ou demasiado óbvio. No entanto, embora se verifique que compreendeu a justificação, a forma como se exprime é pouco formal do ponto de vista matemático.

I - Porque é que em três números consecutivos tenho sempre um múltiplo de 2?

M - Porque os múltiplos de 2 vão de 2 em 2...

I - Exatamente e se vão de 2 em 2, numa sequência de 3 eu “apanho” sempre...

M - Um ou dois múltiplos de 2.

I - Exatamente, portanto pelo menos um múltiplo de dois está lá sempre. E os múltiplos de três?

M - Apanha só um...

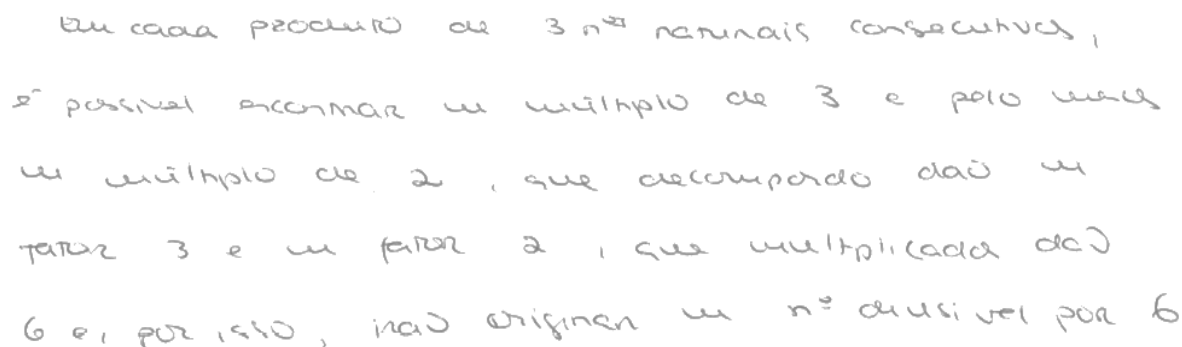
I - Mas apanha sempre?

M - Sim

I - Porquê?

M - Porque vai de 3 em 3.

Já no final da demonstração, a aluna referiu ter compreendido a demonstração, mas não saberia como explicar por palavras, o que revela uma insegurança em utilizar linguagem matemática. Apesar disso, a justificação que a aluna apresenta é bastante clara e objetiva, o que significa que organizou bem as informações e as conseguiu articular de forma coerente, tal como se pode verificar pela parte final da sua resposta na Figura 33.



Em cada produto de 3 n.º naturais consecutivos,  
é possível encontrar um múltiplo de 3 e pelo menos  
um múltiplo de 2, que decomposto dão um  
total 3 e um par 2, que multiplicada dão  
6 e, por isso, não originar um n.º divisível por 6

Figura 33: Parte final da resposta de Matilde à Demonstração 3.

## 5.4. Decisões tomadas e dificuldades sentidas por Matilde

### 5.4.1. 1.<sup>a</sup> sessão: Desafio 1 + Demonstração 1

Na primeira sessão, Matilde escolheu como primeira proposta a tarefa “Idades dos meninos”, por oposição à tarefa “Quadrados perfeitos”, por esta última ter uma demonstração associada, nas palavras da aluna, pelo facto de ser um “mostre que”.

No final do desafio lógico, a investigadora tentou compreender quais tinham sido as maiores dificuldades da aluna durante a resolução do desafio. A aluna referiu que a sua maior dificuldade residia na altura em que teve de excluir os produtos repetidos. E, embora tenha considerado o desafio difícil, referiu que tinha gostado de o resolver.

Já em relação à demonstração algébrica, a aluna apontou como maiores dificuldades a demonstração em si, isto é, perceber o que queria provar e como o fazer. Além disso, sentiu dificuldade na conclusão da demonstração.

I - O que achas que é difícil neste desafio?

M - Este. De chegarmos àquilo que queremos provar.

I - Traduzir matematicamente o que queremos provar, é difícil?

M - Sim, por exemplo, aqui: Substituir o  $2x$  por  $a^2 + b^2 + a^2 + b^2$ .

(...)

I - Mas depois de traduzires matematicamente e veres os casos notáveis, sentiste mais alguma dificuldade?

M - Hum... Concluir.

I - Concluir que já tinhas chegado onde querias?

M - Sim.

I - Porquê? Perdeste-te ou não sabias que se tratavam de quadrados perfeitos?

M - Sim, foi isso!

Quando a investigadora perguntou a Matilde se tinha preferido a demonstração algébrica ou o desafio lógico, esta referiu que tinha gostado mais de resolver o desafio lógico “Idades dos meninos”, pelo mesmo motivo que a fez escolher este para começar: não era para “mostrar” (ao contrário do outro). A aluna reforçou que não gostava de demonstrações e que, além do mais, o desafio lógico tinha “mais números”.

### 5.4.2. 2.<sup>a</sup> sessão: Desafio 2 + Demonstração 2

Na segunda sessão, Matilde continuou a optar por iniciar pelo desafio lógico, neste caso o desafio “Simpáticas, mas um pouco mentirosas”, por considerar que lhe parecia “mais fácil”, novamente em comparação com a demonstração algébrica “Números Primos” que tinha para resolver, que também exigia uma demonstração, o que pesa na decisão da aluna.

Matilde considerou a demonstração algébrica “Números Primos” mais complicada, referindo que não iria conseguir chegar lá sem os auxílios dados pela investigadora. As suas maiores dificuldades prenderam-se com a interpretação da implicação e com a conclusão da demonstração, isto é, perceber quando se concluiu que já estava explicado. A aluna confessa que teria continuado a justificar os casos superiores a 5. Além disso, embora tenha confirmado os conceitos de primo e de divisor, não considerou

esta situação como um entrave, uma vez que adveio apenas de confundir por vezes o conceito de “múltiplo” e “divisor”.

Relativamente ao desafio lógico, a aluna não viu nenhuma dificuldade, embora não saiba justificá-lo. Para o resolver refere apenas que foi colocando a informação e tirando conclusões do que tinha escrito. Dessa forma, foi simples para Matilde chegar à solução.

### 5.4.3. 3.<sup>a</sup> sessão: Desafio 3 + Demonstração 3

Na terceira sessão, Matilde começou pelo desafio “Agente de recenseamento”, justificando que não pretendia começar por um “mostre que”, por gostar menos.

Relativamente ao desafio lógico “Agente de recenseamento”, a aluna considerou “um bocadinho complicado” por causa da linguagem. Considerou o casal Oliveira o mais difícil de tratar, pelo facto de ter de encontrar o “contrário”. Referiu ainda que continuava com algumas dúvidas sobre o casal Pereira. Além disso, considerou um obstáculo ter de “dizer o contrário das afirmações”. Acreditava que envolvia a temática de Lógica, referente ao 10.º ano, matéria que tinha gostado, mas quando confrontada com questões mais simples e diretas, que não exigissem fazer raciocínios.

I - E não gostas disso neste contexto, preferias que fosse simbólico... Porque é que dizes que gostaste da lógica de 10.º e não gostaste deste desafio?

M - Eu gostava da lógica de 10.º, mas era pôr em tabelas e essas coisas. Coisas simples, não é estas coisas...

I - Achas muito difícil, é?

M - Um bocadinho...

A maior dificuldade apontada para a demonstração “Produto” foi o facto de não saber que era necessário decompor e, ainda, chegar à conclusão. Segundo o seu ponto de vista, nunca iria conseguir resolver um exercício destes.

I - Porque é que achas que este género de exercícios são tão difíceis?

M - Porque os outros têm cálculos, estes têm raciocínio que não envolve cálculos.

Quer dizer, envolve, mas a maior parte não são cálculos...

I - Porque é que começaste por aqui e depois não continuaste?

M - Porque não sabia como continuar...

I - Ok... E foi mais simples para ti depois de veres exemplos?

M - Sim...

I - Achas que sem exemplos não pensarias na decomposição?

M - Não...

De entre os dois, a aluna não elegeu nenhum deles como preferido, uma vez que tinha considerado ambos muito complicados. O primeiro por ser difícil de interpretar e o segundo pelo facto de ser uma demonstração.

## 5.5. Síntese do estudo de caso: Matilde

Matilde preferiu, ao longo das três sessões, iniciar pelos desafios lógicos, perdurando a justificação do desagrado perante demonstrações. Nos desafios lógicos, a aluna mostrou sempre alguma dificuldade em construir argumentos formais e lógicos, recorrendo, várias vezes, a justificações

empíricas. Quando confrontada com desafios que exigiam uma interpretação lógica mais aprofundada mostrou que apenas gostava de lógica ao nível da construção de tabelas de verdade, e exercícios simples, o que traduz a sua tendência para a mecanização dos conceitos. No que diz respeito às demonstrações algébricas, manifestou muita insegurança em lidar com estas e com linguagem matemática, apresentando uma melhor compreensão através do uso de exemplos.





## 6. Conclusão

A investigação levada a cabo teve como principal objetivo compreender de que modo os processos de raciocínio em demonstrações algébricas se relacionam com a resolução de desafios lógicos e identificar as principais dificuldades dos alunos nestes processos. O cumprimento deste objetivo permitiu uma compreensão mais profunda relativamente ao raciocínio matemático dos alunos, em particular, a forma como estes encaram as demonstrações e os desafios que se afastam das habituais propostas com que se deparam na sala de aula. Para a concretização deste estudo foram realizadas seis sessões de trabalho, três para cada uma das alunas do 12.º ano de escolaridade. Em todas as sessões as alunas foram confrontadas com um desafio lógico e uma demonstração algébrica, que realizavam pela ordem que preferissem.

Relativamente aos desafios lógicos, os alunos realizaram os desafios designados por *Idades dos Meninos (Desafio 1)*, *Simpáticas, mas um pouco mentirosas... (Desafio 2)* e *Agente de Recenseamento (Desafio 3)*, os quais não exigiam recurso a conteúdos específicos de “matemática escolar”.

No que diz respeito às demonstrações algébricas, os alunos concretizaram as demonstrações *Quadrados Perfeitos (Demonstração 1)*, *Números primos (Demonstração 2)* e *Produto (Demonstração 3)*, que, ao contrário dos desafios, tinham de ser resolvidas com recurso a alguns conhecimentos de “matemática escolar”.

A investigadora evitou a escolha de demonstrações que exigissem a mobilização de conteúdos lecionados mais recentemente ou que exigissem definições muito técnicas ou formais. Assim, realça-se que qualquer uma delas exigia apenas conteúdos de matemática ao nível do ensino básico, pois a intenção era colocar o foco no raciocínio que os alunos conseguiriam desenvolver a partir de matérias que qualquer aluno, independentemente do seu sucesso à disciplina, conseguisse dominar. Assim, em vez de procurar demonstrações no domínio do cálculo diferencial ou da geometria, foi encontrado o equilíbrio que pretendia na teoria de números, tal como foi justificado na introdução desta investigação.

O estudo seguiu uma abordagem qualitativa de índole interpretativa e, para tal, realizaram-se dois estudos de caso (Luísa e Matilde) de forma a compreender as diferenças existentes ao nível do raciocínio entre a resolução de desafios lógicos e a realização de demonstrações algébricas, as dificuldades manifestadas e o impacto da utilização de exemplos.

Tal como já referido, o estudo procurou responder às seguintes questões:

1. Que tipo de raciocínio demonstram os alunos durante a resolução de desafios lógicos ou de demonstrações algébricas?
2. Quais as maiores dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução de desafios lógicos comparativamente à resolução de demonstrações algébricas?
3. De que forma a utilização de exemplos influencia o raciocínio dos alunos durante a resolução de desafios lógicos ou demonstrações algébricas?

4. Que diferenças são evidenciadas pelos alunos entre a capacidade de resolução de desafios lógicos e a capacidade de resolução de demonstrações algébricas?

### **O raciocínio matemático e os tipos de raciocínios**

De acordo com Artzt e Yaloz-Femia (1999) tanto Luísa como Matilde utilizaram raciocínio matemático ao longo das várias sessões, pois recorreram a métodos de “tentativa e erro” sucessivamente até encontrar a solução das propostas e, ainda, fizeram conjecturas e testaram-nas. No entanto, nem sempre o manifestaram de forma célere, revelando algumas dificuldades durante as várias sessões. Relativamente às dificuldades sentidas pelas alunas será dado o devido enfoque adiante, como forma de dar resposta à segunda questão de investigação do estudo. Neste ponto será abordado o tipo de raciocínio e a utilização do raciocínio matemático por parte das alunas participantes no estudo.

Tal como refere Oliveira (2002), o raciocínio dedutivo é um raciocínio desenvolvido do geral para o particular. Embora as alunas tenham tentado começar a demonstrar algumas das propostas com um raciocínio dedutivo, principalmente nas demonstrações algébricas, estas começaram a evidenciar maior capacidade de raciocinar quando o fizeram de modo indutivo, isto é, desenvolvendo um raciocínio recorrendo a casos particulares e, a partir deles, identificar relações e padrões, o que vai ao encontro das etapas propostas por Greenes e Findell (1999). No entanto, a generalização dessas relações constituiu uma tarefa mais desafiante para as alunas, o que vai ao encontro da ideia de Zazris, Liljedahl e Chernoff (2007).

Mesmo depois de ter concluído a demonstração *Quadrados Perfeitos*, Luísa referiu que se estivesse “em sua casa” a resolver o exercício, iria verificar para mais “um ou dois exemplos”. Esta intenção corrobora a ideia de De Villiers (1999) que afirma a necessidade de complementar uma demonstração dedutiva, numa dimensão lógica, com alguma exploração e compreensão intuitiva, numa dimensão psicológica. Quando a investigadora inquiriu Matilde sobre a necessidade de verificar a propriedade para mais algum exemplo, esta referiu que não sentia necessidade de tal, pois já tinha provado através de “letras”. Esta afirmação poderá significar que, ao invés de Luísa, Matilde vê a demonstração como um meio suficiente para obter convicção acerca de um determinado resultado, não sendo necessário complementar a demonstração com exemplos ilustrativos.

Tal como já mencionado, relativamente ao tipo de raciocínio das alunas, ambas apresentaram um raciocínio essencialmente indutivo, o que significa que preferem recorrer a dados empíricos para formular as suas conjecturas, generalizações e justificações, em detrimento de raciocínio dedutivo. No entanto, tal como distinguiu Galbraith (1995), no próprio raciocínio dedutivo podem considerar-se dois casos, o que se verificou com as duas alunas. Na maioria das vezes, Luísa refletiu sobre os casos que deveria escolher nas diferentes situações, revelando uma escolha de exemplos mais selecionada, que pudesse ir ao encontro de contraexemplos das propriedades. No entanto, Matilde optou por testar alguns casos de forma menos criteriosa, o que, por vezes, era sinónimo de não encontrar os contraexemplos que refutassem as falsas conjecturas que construía.

Na última demonstração, *Produto*, Luísa tentou procurar um método para a sua resolução através daqueles que tinha utilizado em sessões anteriores. Isto significa que tentou realizar alguns raciocínios por analogia, recorrendo a conhecimentos que tinha aplicado nas primeiras sessões. Uma ideia intrínseca aos trabalhos de Pólya (1954) e Ponte, Brocado e Oliveira (2003) é de que um dos processos de raciocínio utilizados pelos alunos é a analogia com casos anteriormente estudados, pelo que no estudo realizado há evidências de que, de facto, a analogia é um recurso utilizado, pelo menos por Luísa. Além disto, há uma tentativa de utilizar frequentemente conteúdos de matemática escolar, em particular de 12.º ano, que são conteúdos mais presentes na memória de Luísa, nomeadamente o triângulo de Pascal, o Binómio de Newton ou as Probabilidades. Esta tentativa constante de recorrer a conteúdos de matemática escolar é pouco perceptível no raciocínio de Matilde ao longo das sessões, tentando esta centrar-se apenas na demonstração e/ou desafio que está a resolver no momento, não fazendo referência às demonstrações anteriores ou a matérias da matemática escolar. No entanto, é de notar que, enquanto Matilde identificou de imediato os casos notáveis necessários à resolução do desafio *Quadrados Perfeitos*, Luísa apresentou maior dificuldade em lembrar-se destes, o que significa que, embora tenha tentado, com maior frequência, relacionar as demonstrações algébricas com conhecimentos adquiridos na sala de aula, não o consegue concretizar de forma tão célere como Matilde o faz.

À semelhança do estudo realizado por Cañadas e Castro (2007), em que todos os alunos revelaram um raciocínio indutivo explícito ou implicitamente, Matilde e Luísa também mostraram uma forte tendência para raciocinarem de forma mais intuitiva. Mesmo com características mais favoráveis ao desenvolvimento de um raciocínio dedutivo, por ter uma relação muito próxima da disciplina e pelo seu interesse e desempenho, Luísa acabou por utilizar muitas vezes a sua intuição para justificar os seus raciocínios, o que revela que mesmo alunos com bom desempenho à disciplina têm alguma tendência para o raciocínio indutivo. A principal diferença entre Luísa e Matilde é que, embora ambas tenham utilizado um raciocínio indutivo, Luísa tem noção de que os exemplos não permitem demonstrar uma propriedade, enquanto que Matilde pergunta numa das sessões se pode “provar com exemplos”, o que poderá evidenciar algumas dúvidas quanto ao conhecimento da aluna relativamente aos conceitos de generalização e demonstração.

É de realçar que as alunas passaram pelas várias fases propostas no estudo dos autores Cañadas e Castro (2007), nomeadamente a observação de casos particulares, a procura de padrões e regularidades e a formulação de conjecturas. No entanto, nem sempre se verificou a validação das conjecturas (a última etapa proposta pelos autores), principalmente no caso de Matilde, que revelou pouco espírito crítico nas suas afirmações e pouca preocupação com a validade das conjecturas construídas. Por exemplo, quando Matilde afirmou que o produto de números era sempre superior à soma dos mesmos números, não foi suficientemente crítica para encontrar um contraexemplo que refutasse a conjectura, quando até tinha acabado de considerar um caso em que tal propriedade não se verificava.

Assim, é possível afirmar que o tipo de raciocínio predominante ao longo das sessões, tanto de Matilde como de Luísa, é o raciocínio indutivo, baseado na observação de casos particulares, na procura de padrões e regularidades e na formulação de conjecturas. Além disso, verificou-se que o desempenho dos alunos à disciplina não altera a predominância do raciocínio indutivo na realização de demonstrações algébricas ou desafios lógicos.

### **As dificuldades manifestadas**

Uma das questões de investigação do presente estudo diz respeito às dificuldades que as alunas sentiram na resolução de desafios lógicos e de demonstrações algébricas. Como forma de simplificar a apresentação dos resultados mais evidentes, serão destacados em seguida alguns fatores que dificultaram o desenvolvimento da resolução das propostas abordadas.

*Dificuldade na compreensão da lógica intrínseca à proposta.* Relativamente aos desafios lógicos, as alunas apenas revelaram uma grande dificuldade em compreender a lógica do primeiro, *Idades dos Meninos*. Neste caso, a dificuldade residiu na interpretação da informação do enunciado, por exemplo, a de que o produto estava estampado na camisola e a senhora não o sabia ou a de que o filho do meio estava em casa com gripe. Além da dificuldade inerente à natureza do desafio, o facto de não conseguirem filtrar as informações importantes ou relacionarem as informações entre si também constituiu um entrave à resolução.

Algumas justificações empíricas e pouco lógicas dadas pelas alunas no início do desafio, como por exemplo, quando Matilde referiu que a senhora poderia não saber fazer contas e por isso é que não sabia como chegar à idade dos meninos ou quando Luísa referiu que normalmente as camisolas que apresentam números estampados têm apenas dois algarismos, condicionaram o desenvolvimento das suas resoluções, transmitindo a ideia de que a falta de compreensão da natureza do desafio é decisiva para a sua resolução. Portanto, o facto de as alunas não terem compreendido que existia uma lógica associada ao desafio condicionou, por diversas vezes, os seus raciocínios.

Relativamente ao último desafio lógico, *Agente de Recenseamento*, as alunas mostraram também uma interpretação errada da informação dada, pelo que acabaram por considerar algumas premissas não válidas, como por exemplo, o casal ser do mesmo tipo, no caso de Luísa, ou as frases ditas serem sempre verdadeiras, independentemente do tipo da pessoa que as disse, no caso de Matilde. Estes obstáculos poderão traduzir uma dificuldade na identificação da lógica intrínseca ao desafio.

No que diz respeito às demonstrações algébricas, Luísa referiu por diversas vezes que o facto de ter de demonstrar algumas propriedades em que não conhecia exatamente as matérias envolvidas ou os métodos de demonstração lhe trazia uma dificuldade acrescida, o que revela que também nas demonstrações algébricas existiram entraves em lidar com a natureza da proposta. Embora Matilde não tenha referido explicitamente este problema, à semelhança de Luísa também demonstrou grande dificuldade em lidar com a natureza algébrica das demonstrações.

*Dificuldade de libertação da mecanização.* As alunas revelaram sempre muita dificuldade em afastar-se da abordagem mais formal e da simbologia matemática, o que constituiu um entrave às suas resoluções. À exceção da primeira demonstração algébrica, as restantes não exigiam um tratamento tão formal, isto é, não era necessário recorrer à utilização de expressões ou equações. No entanto, as alunas também mostraram pouca tendência em pensar de forma mais intuitiva, fazendo menor uso do raciocínio e maior da mecanização da resolução de equações ou desenvolvimento de expressões. Assim, é evidente que, tanto no desafio lógico *Idade dos Meninos* como nas demonstrações algébricas, algumas das dificuldades encontradas prenderam-se principalmente com a excessiva tentativa de encontrar um algoritmo matemático que resolvesse o problema, desprezando a capacidade de raciocínio, de compreender a lógica intrínseca à demonstração ou ao desafio e de encontrar ligações entre diferentes informações por forma a encontrar um caminho para a sua resolução. Esta dificuldade poderá ser justificada, tal como já mencionado, pelo facto de as alunas estarem demasiado presas a processos mecanizados e pouco despertas para a utilização do raciocínio e do espírito crítico.

*Falta de domínio nos conteúdos de matemática.* As dificuldades das alunas nos conteúdos matemáticos foram essencialmente visíveis durante a resolução das demonstrações algébricas. Estas apresentaram um conhecimento pouco seguro quanto aos conceitos de números primos, divisores ou múltiplos. Tanto Luísa como Matilde confessaram fazer confusão entre “múltiplos” e “divisores”. Embora tenham conseguido expressá-las por meio de expressões, após confirmarem as respetivas definições com a investigadora, as alunas apresentaram alguma dificuldade no próprio conceito, pois não sabiam, por exemplo, na demonstração *Números Primos*, que para que um número fosse divisível por 6 teria de ser divisível por 2 e por 3. É de notar que Luísa apresentou maior facilidade no significado dos objetos matemáticos, o que revela, em comparação com Matilde, uma maior atribuição de significado à simbologia matemática e, consequentemente, um melhor entendimento sobre esta. Por exemplo, na demonstração *Quadrados Perfeitos*, enquanto Luísa referiu que as letras das variáveis consideradas tinham de ser diferentes porque os objetos poderiam ser diferentes, Matilde referiu que as letras não poderiam ser diferentes, porque existiam casos em que poderiam ser iguais (eventualmente terá feito esta observação porque o primeiro exemplo que testou foi com dois números iguais). É visível a falha conceptual de Matilde relativamente aos objetos matemáticos considerados, enquanto Luísa revelou compreender exatamente que as letras diferentes poderiam, ou não, dizer respeito a objetos diferentes.

*Dificuldade de notação.* Por vezes a linguagem utilizada por ambas as alunas não é a mais formal, e, especialmente no caso da Matilde, a notação utilizada nem sempre é a mais simples. Por um lado, a linguagem e notação pouco formais utilizadas por Matilde poderão dever-se ao facto de esta não se revelar autónoma na construção de demonstrações. Por outro lado, Luísa, embora apresente uma muito boa noção conceptual dos objetos matemáticos, evidencia alguma tendência para se esquecer da utilização de uma notação simples, o que também poderá ser causado pela falta de prática na realização

de demonstrações. É importante realçar esta dificuldade, uma vez que a notação utilizada poderá ter causado a dificuldade de progredir, em certos casos, nas demonstrações.

*Confiança em lidar com determinados estados emocionais e psicológico.* À semelhança do que Mason, Burton e Stacey (2010) consideraram, existem diversos fatores que influenciam a eficácia do raciocínio matemático, sendo um dos fatores apresentados a confiança em lidar com determinados estados emocionais e psicológicos. A dificuldade em lidar com a insegurança foi bastante visível ao longo das sessões de Matilde, referindo várias vezes que não saberia fazer ou que não conseguiria continuar por não se considerar eficiente neste tipo de tarefas. Em contraste, Luísa, apresentou sempre uma grande persistência de modo a encontrar a resposta aos desafios e demonstrações. Apesar de por vezes desabafar expressões do género "meu Deus, nunca na vida me lembraria de fazer isto", Luísa demonstrou-se sempre bastante comprometida na resolução dos desafios e das demonstrações. Tal como Veloso (1998) recomenda, as demonstrações devem decorrer do trabalho dos próprios, uma vez que isso irá contribuir para uma maior eficácia do processo de aprendizagem. O estado emocional de Matilde poderá ter influenciado a sua prestação nas sessões devido à sua falta de confiança. Algo que não aconteceu com Luísa, por esta se demonstrar geralmente confiante nas suas resoluções.

*Dificuldade na formulação de conjecturas.* A formulação de conjecturas foi uma prática recorrente, principalmente ao longo das demonstrações algébricas. Aliás, tal como já referido as alunas utilizam preferencialmente um raciocínio indutivo, pelo que, de acordo com Ponte, Brocado e Oliveira (2003) a formulação de conjecturas é comum, nomeadamente a observação direta dos dados, a manipulação dos mesmos ou a analogia com outras conjecturas. Matilde apresentou particular dificuldade na manipulação dos dados observados, isto é, na procura de relações e padrões entre os dados, o que influenciou fortemente a sua capacidade de dar resposta às diferentes propostas. Embora Luísa também tenha apresentado alguma dificuldade na resolução das propostas, tal como já referido, o facto de não desistir de encontrar um caminho para as suas respostas levou-a a formular frequentemente conjecturas, a refletir e a questionar, o que favoreceu o desenvolvimento do seu raciocínio ao longo de cada sessão. Uma dificuldade inerente às resoluções das alunas ao longo das sessões foi o pouco sentido crítico na validação das conjecturas formuladas. Matilde teve algumas dificuldades na verificação de conjecturas assim como na determinação de contraexemplos para as mesmas. Estes aspetos levaram a que, por vezes, a aluna ficasse presa a conjecturas que eram falsas, o que não aconteceu com Luísa por esta revelar maior aptidão a testar conjecturas. A demonstração algébrica em que ambas as alunas revelaram maior dificuldade no que diz respeito à validação ou refutação de conjecturas foi na demonstração *Números Primos*, em particular no momento em que tinham de demonstrar a propriedade nos diferentes casos considerados, o que foi designado de "raciocínio cíclico" na recolha de dados.

*Dificuldade nos processos de investigação matemática (demonstrações).* Selden e Selden (2003) referem no seu estudo que alguns alunos tendem a concentrar-se em erros superficiais, ao invés de aspetos mais gerais, como o método de demonstração de uma afirmação (por exemplo, se é pelo método direto, por contrarrecíproco, etc.) ou os argumentos válidos para a demonstração em questão.

Efetivamente também neste estudo se verifica dificuldade das alunas na parte estrutural das demonstrações realizadas nas demonstrações algébricas, isto é, na identificação das características mais formais das demonstrações, como por exemplo o método que é utilizado para a sua demonstração.

Matilde por diversas vezes faz afirmações que não são válidas, como por exemplo quando refere que o produto de números é sempre superior à sua soma. Também Luísa refere que os números primos são todos os ímpares superiores a cinco. Estas situações vão ao encontro das conclusões de Pereira e Ponte (2013), que referem que os alunos não dão importância às características das justificações necessárias para que estas sejam matematicamente válidas. As alunas não procuraram exemplos que não verificassem algumas das conjecturas que construíram, uma vez que não é matematicamente possível que o produto de números seja sempre superior à soma desses números (basta, por exemplo, considerar 1 e 12) nem que os números ímpares superiores a 5 sejam primos (considere-se, por exemplo, o 9). Tal como valoriza Lannin (2005), é importante que os alunos compreendam a importância das justificações matematicamente corretas, pelo que a investigadora fez algumas observações a Matilde ao longo das sessões neste aspeto.

Concluindo, no que diz respeito às dificuldades manifestadas pelos alunos nos desafios lógicos e nas demonstrações algébricas, é possível destacar as seguintes: a dificuldade em raciocinar de modo mais indutivo, tentando uma libertação dos processos mecânicos de resolução de equações; a dificuldade de lidar com a insegurança e alguns estados emocionais de frustração e pouca confiança; a dificuldade de mobilizar conhecimentos matemáticos previamente adquiridos (principalmente no ensino básico); a dificuldade de utilizar os diferentes processos de raciocínio matemático, em particular, a demonstração.

### **Os exemplos e os contraexemplos**

A utilização de exemplos durante as sessões foi de extrema importância, uma vez que permitiu às alunas um desbloqueio no processo de resolução, dado que algumas vezes não conseguiam dar sentido à simbologia na qual convertiam o enunciado. Deste momento, houve indícios de que a concretização das propriedades através de casos particulares terá tornado mais claro o entendimento das alunas.

Matilde, na demonstração *Números Primos*, considerou que queria demonstrar a recíproca da afirmação, isto é, que entre cada múltiplo de seis estão números primos. E, dado que o enunciado considerava que deveriam ser indiciadas as duas exceções, Matilde encontrou um caso que não verificava a sua conjectura e acabou por considerá-lo como uma das exceções. Esta é precisamente uma das abordagens indicada por Balacheff (1991) na sua investigação para contornar os contraexemplos. Este autor refere precisamente a modificação de conjecturas e a consideração dos contraexemplos como exceções como uma prática frequente para superar situações que levem a que a condição não seja válida.

Weber (2010) considera que uma das principais estratégias para validar argumentos é através de um raciocínio baseado em exemplos, o que foi fortemente visível no raciocínio das alunas nas diferentes sessões. As outras estratégias apontadas por este autor dizem respeito ao raciocínio formal e

construção rigorosa de demonstrações ou um raciocínio dedutivo formal. As alunas raramente apresentaram estas duas últimas estratégias, pelo menos não de forma autónoma.

Matilde, muitas vezes, não entendeu que teria de justificar dedutivamente as suas conjecturas, referindo que já teria verificado a validade da propriedade para alguns casos, transmitindo a ideia abordada por Ponte, Brocado e Oliveira (2003). Estes autores referem que os alunos têm alguma tendência para considerarem uma conjectura válida com base na veracidade de apenas um número reduzido de casos. Luísa, embora também refira que a propriedade se verifica para todos os casos que “tem na sua cabeça”, o que revela que recorre a casos particulares, tem consciência que isso não garante que a conjectura seja válida e procura encontrar formas de conseguir demonstrá-la, o que revela que conhece o conceito de generalização e demonstração. Além disto, é importante referir que Luísa também tem noção de que basta um contraexemplo para refutar uma afirmação, o que reafirma a sua noção correta de generalização.

Antonini (2006) aponta a tentativa e erro, transformação e análise como as principais estratégias para a produção de exemplos. Também no presente estudo é visível a tendência que as alunas apresentaram para a utilização de exemplos construídos por métodos de tentativa e erro ou transformação. Embora Luísa, tal como já referido, tenha apresentado maior seleção nos exemplos construídos, não recorreu à produção de exemplos através da análise, que o autor sugere como sendo a consideração da existência do objeto pretendido e, a partir dessa premissa, deduzir-se outras propriedades necessárias até obter o objeto inicial considerado e verificar que ele efetivamente existe. Foi, sim, mais usual recorrer à tentativa e erro que, para o autor, significa produzir exemplos que satisfazem determinados critérios, aos quais se aumentam as características e se testam sucessivamente para conferir se satisfazem os critérios exigidos.

Em suma, existem evidências que permitem afirmar que a utilização de exemplos influencia positivamente o desenvolvimento do raciocínio matemático, tanto na resolução de demonstrações algébricas como de desafios lógicos.

### **Os desafios lógicos *versus* as demonstrações algébricas**

As investigações que abordam desafios lógicos, e os relacionam com demonstrações algébricas, são escassas. Pela extensão do estudo, os resultados alcançados nesta investigação relativamente às diferenças entre a capacidade de realização de demonstrações algébricas face à resolução de desafios lógicos foram pouco expressivos. Para obter resultados mais significativos, seria importante analisar mais estudos de casos e, eventualmente, considerar técnicas de investigação de índole quantitativa. No entanto, tal como tinha sido inicialmente traçado, a investigação pretendia impulsionar a área em estudo, pelo que se deixarão algumas considerações por forma a fomentar a investigação neste campo, pois mantém-se a convicção de que é um tema muito pertinente e relevante.

Inicialmente a investigadora tentou compreender se as alunas tinham alguma preferência pelos desafios lógicos face às demonstrações algébricas. Neste sentido, foi-lhes pedido, em todas as sessões,



que escolhessem a proposta que mais lhes agradasse para começar a resolver. Na maioria das vezes, as alunas preferiram começar pelos desafios lógicos, justificando essencialmente pelo carácter justificativo das demonstrações algébricas e pela dificuldade que estas apresentam, o que vai ao encontro das ideias de Balacheff (1991) e Chazan (1993), de que os alunos consideram as demonstrações difíceis. Dado que as alunas apenas referiram escolher os desafios lógicos por oposição às demonstrações algébricas, não é possível compreender se gostaram, por si só, da natureza dos desafios lógicos ou se foi simplesmente por não gostarem de resolver demonstrações algébricas. Em todo o caso, provavelmente os desafios lógicos poderão ser uma forma de desenvolver técnicas de demonstração, potenciar a capacidade de raciocínio, o espírito crítico e a desconstrução do pensamento, e, conseqüentemente, o desenvolvimento do raciocínio matemático, uma vez que todas estas características estão presentes nos desafios lógicos, assim como estão nas demonstrações algébricas e todas as tarefas matemáticas em geral.

Matilde, em particular, optou sempre por começar as sessões pelos desafios lógicos, argumentando que nunca gostou de demonstrações por considerar que são pouco fáceis. Já Luísa, na primeira sessão, optou por deixar o desafio lógico para realizar em segundo lugar, pelo facto de lhe parecer mais interpretativo e relacionado com “questões de português”, contrariamente à demonstração algébrica, que lhe pareceu “mais gira e mais matemática”. Apesar disso, é interessante verificar que nas sessões posteriores, escolheu começar pelos desafios lógicos, referindo que tinha aprendido, na primeira sessão, que o facto de ter muito texto não significava que fosse “mais difícil”, isto é, a aluna viu nas demonstrações algébricas uma dificuldade acrescida relativamente aos desafios lógicos, embora estes tivessem um enunciado mais curto. A aluna reforçou em todas as sessões que não se sentia suficientemente treinada a realizar demonstrações autonomamente, pois normalmente era sempre o professor a realizá-las em sala de aula ou então tratavam-se de demonstrações com um caminho mais evidente do que aquelas com que a aluna foi confrontada pela investigadora.

É interessante verificar que houve uma maior tendência para matematizar, isto é, traduzir as informações dadas por meio de simbologia matemática, quando as propostas envolviam números e operações. Em quase todas as demonstrações algébricas (que precisamente envolviam números, múltiplos, divisores, números primos, etc.), ambas as alunas começaram por traduzir o enunciado, ou parte dele, por meio de uma expressão ou equação, o que comprova que existe grande tendência para a matematização em demonstrações de carácter algébrico. Por seu lado, nos desafios lógicos, apenas houve esta tentativa de matematização quando o próprio desafio envolvia números e operações, como foi o caso do desafio *Idades dos Meninos*. Pelo que se verifica que, independentemente de se tratar de desafios lógicos ou de demonstrações algébricas, existe uma propensão de uma matematização em propostas de natureza algébrica, isto é, que têm implicitamente uma condição, uma equação, uma expressão e/ou operações e números.

Apoiando a conclusão de que as alunas revelaram maior matematização nas propostas que envolviam números e operações em comparação com aquelas que não envolvem, é possível verificar que as alunas, quando confrontadas com um desafio lógico que não envolvia números e operações, o

desafio lógico *Agente de Recenseamento*, mas que tinha intrínsecos conteúdos de lógica da matemática escolar, nomeadamente a lógica de 10.º ano, não recorreram a simbologia ou conceitos matemáticos para o resolver. Isto significa que o facto de ter uma matéria da matemática escolar envolvida não faz com que tenham uma abordagem mais formal. Este caminho apenas foi seguido em conteúdos algébricos, pelo que seria interessante, num estudo futuro, constatar se existem evidências da utilização de simbologia matemática noutras matérias onde estas estivessem implícitas.

Outro aspeto importante a realçar é que Luísa considerou que o desafio *Idades dos Meninos*, embora não tivesse informação suficiente para ser respondido, teria de ter uma forma de ser resolvido. À semelhança do que aconteceu neste desafio, voltou a considerar a impossibilidade de uma resposta em aberto no desafio *Agente de Recenseamento*, o que poderá ser justificado pelo facto de a aluna se deparar apenas com exercícios em que existe sempre um caminho para a solução da proposta. Este indício poderá levar à utilização de desafios lógicos para mostrar aos alunos a impossibilidade das respostas e, com isso, mostrar-lhes que a matemática não tem de ter sempre respostas. Matilde já não apresentou esta dificuldade, tendo sempre considerado a possibilidade de não conseguir responder, o que revela que as alunas têm perspetivas diferentes dos problemas que resolvem.

O único desafio lógico que não envolvia direta ou explicitamente conteúdos de matemática escolar, era o desafio *Simpáticas, mas um pouco mentirosas...*, pelo que é muito curioso observar que as alunas não apresentaram qualquer dificuldade na sua resolução, tendo as alunas demorado em média 5 minutos para chegar à sua solução. Efetivamente a forma como estas organizaram a sua informação e, consequentemente, o seu raciocínio, permitiu-lhes desenvolver um raciocínio muito direto e simples. A ausência de um conteúdo matemático e o facto de envolver apenas um raciocínio encadeado, poderá ter sido a causa da facilidade com que as alunas o resolveram.

Assim, como forma de responder à questão de investigação colocada, se existem diferenças entre a capacidade de resolução de desafios lógicos e a capacidade de realização de demonstrações algébricas, é possível afirmar que houve evidências de que as alunas sentiram algumas dificuldades em raciocinar sobre os desafios lógicos (à exceção do segundo) assim como também sobre as demonstrações algébricas. Dado que, tanto os desafios lógicos como as demonstrações algébricas divergem das tarefas a que os alunos estão habituados a responder no seu dia a dia, o estudo evidencia muita dificuldade na resolução dos desafios lógicos e das demonstrações algébricas. Por este motivo, talvez seja possível deduzir que não existem diferenças significativas entre a capacidade de realização de demonstrações algébricas e de desafios lógicos. Em ambas as propostas as alunas mostraram grande dificuldade em afastar-se da abordagem algébrica e da resolução de equações, o que poderá ser indício da formatação que a escola impõe aos alunos pelos currículos que estão em vigor, obrigando implicitamente à convergência para uma mecanização de conhecimentos, com pouco espaço para a reflexão, a crítica e o raciocínio.

## 6.1. Considerações Finais

Em termos globais, o estudo realizado sugeriu que existem evidências da dificuldade dos alunos de 12.º ano na abordagem de desafios lógicos e/ou demonstrações algébricas com as quais estes não estejam suficientemente familiarizados, ou para as quais existe uma forma “mais ou menos” mecânica de encontrar a sua solução. Assim, o estudo também mostrou que, perante propostas como as anteriormente descritas, os alunos apresentam maior tendência para desenvolver um raciocínio indutivo, isto é, através da observação de exemplos e da construção de conjecturas, ou seja, da observação do particular para o geral. No entanto, nem sempre consideram relevante para a validação da propriedade estas últimas fases.

Relativamente às principais dificuldades, é possível salientar as dificuldades na compreensão da natureza da proposta, na libertação da mecanização, na falta de domínio de conteúdos matemáticos, na notação, na gestão de determinados estados físicos e psicológicos, na formulação de conjecturas e no desenvolvimento de processos de investigação matemática, nomeadamente demonstrações. Embora existam evidências de que o desempenho a matemática não seja suficiente para conseguir concretizar alguns desafios lógicos e demonstrações algébricas de forma célere, é visível a importância que assume o conhecimento concetual dos objetos matemáticos e a capacidade de raciocinar de forma lógica.

Além do exposto, foi possível verificar que não só os alunos recorrem autonomamente à utilização de exemplos como forma de compreenderem melhor as propriedades que estão a analisar, como também mostraram um melhor entendimento quando a investigadora recorria a exemplos para explicar o enunciado. Assim, é provável que os exemplos possam ser uma via positiva para o melhor entendimento de alguns conteúdos pelos alunos e para o desenvolvimento do seu raciocínio matemático.

É de realçar que a investigação levada a cabo teve pouco suporte teórico, na relação entre os desafios lógicos e as demonstrações algébricas, uma vez que é um tema onde o número de estudos é reduzido. Assim, ao encontro do objetivo que o estudo tinha, pretende-se dar algum contributo para o avanço do tema na comunidade científica. Da investigação realizada é possível concluir que não houve diferenças significativas entre a capacidade de resolução de desafios lógicos face à resolução de demonstrações algébricas, uma vez que as alunas envolvidas no estudo revelaram pouca capacidade de interpretar a lógica intrínseca a um desafio lógico assim como de utilizar processos de raciocínio matemático.

Relativamente ao estudo, seria importante completá-lo através da análise de um maior número de estudos de caso. Além disso, em futuras investigações seria importante dar respostas a questões que continuam em aberto, nomeadamente:

1. Compreender de que forma seria possível classificar os diferentes tipos de desafios lógicos e analisar que tipo de raciocínios se utilizam em cada um deles.
2. Perceber se os desafios lógicos poderão contribuir para a aprendizagem e, em particular, se poderão desenvolver o raciocínio matemático dos alunos na realização de demonstrações.

3. Analisar de que forma os desafios lógicos podem constituir um instrumento de aprendizagem da matemática em sala de aula.

## 7. Bibliografia

- Aires, L. (2011). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Antonini, S. (2006). *Graduate students' processes in generating examples of mathematical objects*. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 57–64). Prague, Czech Republic: IGPME.
- Aliseda, A. (2003). Mathematical reasoning vs. abductive reasoning: a structural approach. *Kluwer Academic Publishers*. 134, 25–44.
- Artzt, A.F. & Yaloz-Femia, S. (1999). *Mathematical Reasoning during Small-Group Problem Solving*. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (NCTM Yearbook) (pp. 115–126). Reston, VA: NCTM.
- Balacheff, N. (1991). *Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning*. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 89–110). Kluwer Academic Publishers.
- Becker, R., & Rivera, F. (2005). *Generalization strategies of beginning high school algebra students*. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 121–128). Melbourne: PME.
- Beirão, M. (2012). *O desenvolvimento do raciocínio matemático apoiado pelo uso continuado de critérios de avaliação: Um estudo com alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico*. Relatório de Estágio, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa.
- Bieda, K. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: Challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(4), 351–382.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação – uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Brewer, J., & Hunter, A. (1989). *Multimethod research: A synthesis of styles*. Newbury Park, CA: Sage.
- Brousseau, G., & Gibel, P. (2005). Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 13–58.
- Cañadas, M. C. & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, 1(2), 67–78.
- Carraher, D., Martinez, M., & Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3–22.
- Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 359–387.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. Routledge.
- Coutinho, C. P., & Chaves, J. H. (2002). O estudo de caso na investigação em Tecnologia Educativa em Portugal. *Revista Portuguesa de Educação*, 15(1), 221–243.

- De Villiers, M. (1999). *Rethinking Proof with Sketchpad*. NY: Key Curriculum Press.
- Eisenhart, M. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education* 19, 99-114.
- English, L. D. (1999). *Reasoning by analogy: A fundamental process in children's mathematical learning*. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (NCTM Yearbook) (pp. 22-36). Reston, VA: NCTM.
- Epstein, D. & Levy, S. (1995). Experimentation and proof in mathematics. *Notices of the American Mathematical Society*, 42(6), 670–674.
- Galbraith, P. (1995). Mathematics as reasoning. *The Mathematics Teacher*, 88(5), 412-417.
- Gold, R. (1958). Roles in sociological field observations. *Social Forces*, 36, 217-223.
- Greenes, C. & Findell, C. (1999). *Developing Students' Algebraic Reasoning Abilities*. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (NCTM Yearbook) (pp. 127-137). Reston, VA: NCTM.
- Iannone, P., Inglis, M., Mejia-Ramos, J. B., Simpson, A., & Weber, K. (2011). Does generating examples aid proof production? *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 1–14.
- Ko, Y. Y., Knuth, E. (2013). Validating proofs and counterexamples across content domains: Practices of importance for mathematics majors. *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 20– 35.
- Knuth, E. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 61–88.
- Knuth, E., Zaslavsky, O., & Ellis, A. (2017). The role and use of examples in learning to prove. *Journal of Mathematical Behavior*.  
Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.06.002>
- Krulik, S. & Rudnick, J. A. (1999). *Innovative Tasks to Improve Critical - and Creative-Thinking Skills*. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (NCTM Yearbook) (pp. 138-145). Reston, VA: NCTM.
- Lannin, J. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical thinking and learning*, 7(3), 231-258.
- Lannin, J., Ellis A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching Mathematics in prekindergarten-grade 8*. Reston, VA: NCTM.
- Martin, W. G. (2009). *Making Reasoning and Sense Making the Focus for Mathematics Education*. Reston, VA: NCTM.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically*, Second Edition. Bristol: Addison-Wesley.
- Meirinhos, M., & Osório, A. (2010). O Estudo de caso como estratégia de investigação em educação. *EduSer: Revista de Educação*, 2(2), 49-65.
- MEC (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática Ensino Básico*. Lisboa: MEC.

- MEC (2014). *Programa e Metas Curriculares de Matemática A Ensino Secundário*. Lisboa: MEC.
- NCTM (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: Author.
- NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática Escolar*. (Trad.) Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Olabeuena, J. I. R. (1996): *Metodologia de la investigación cualitativa*. Bilbao: Universidad de Deusto.
- Oliveira, P. (2002). *A investigação do professor, do matemático e do aluno: uma discussão epistemológica*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa.
- Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia. *Educação e Matemática*, 100, 3–9.
- Peled, J., & Zaslavsky, O. (1997). Counter-examples that (only) prove and counter-examples that (also) explain. *Focus on Learning Problem in Mathematics*, 19(3), 49–61.
- Pereira, J. M. (2012). *O raciocínio matemático em alunos do 9º ano no estudo dos números reais e inequações*. (Dissertação de Mestrado), Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa.
- Pereira, J. M. & Ponte, J.P. (2013). Desenvolvendo o raciocínio matemático: Generalização e justificação no estudo das inequações. *Boletim Gepem N.º 62 - Jan/Julho*, 17-31.
- Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning* (Vol. I – Induction and analogy in mathematics). Princeton: Princeton University Press.
- Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em Educação Matemática. *Bolema*, 25, 105-132.
- Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). *Uma oportunidade de mudança na Matemática no ensino básico. In APM, O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.
- Rodrigues, M. (2009). As capacidades transversais no novo programa do ensino básico: desafios à sua integração. *Educação e Matemática*, 105, 38-40.
- Russel, S. (1999). *Mathematical Reasoning in the Elementary Grades*. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (NCTM Yearbook) (pp. 1-12). Reston, VA: NCTM.
- Santos, C. (2011). *O raciocínio matemático dos alunos do 7.º ano em tarefas de exploração e investigação no tópico triângulos*. Relatório da prática de Ensino Supervisionada, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa.
- Saraiva, M. J. (2008). Raciocinar em Matemática com imagens visuais vagas e com intuição. *Educação e Matemática*, 100, 29–32.

- Segarra, L. (2001). *Problemates Colección de problemas matemáticos para todas las edades*. Barcelona, Espanha: Editorial GRAÓ, de IRIF, S.L.
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4–36.
- Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.
- Steen, L. (1999) *Twenty questions about mathematical reasoning*. In Leo Stiff (Ed.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 37-44). Reston, Va: NCTM.
- Sternberg, R. J. (1999). *The nature of mathematical reasoning*. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12 (NCTM Yearbook)* (pp. 37-44). Reston, VA: NCTM.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289–321.
- Tang, E.P. & Ginsburg, H. P. (1999). *Young Children's Mathematical Reasoning: A Psychological View*. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12 (NCTM Yearbook)* (pp. 45-61). Reston, VA: NCTM.
- Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- Veloso, E. & Viana, J.P. (1991). *Desafios*. Porto: Edições Afrontamento
- Veloso, E. & Viana, J.P. (1992). *Desafios 2*. Porto: Edições Afrontamento
- Veloso, E. & Viana, J.P. (1995). *Desafios 4*. Porto: Edições Afrontamento
- Viana, J. P. (2015). *Problemas... sem problema... em 30 anos do ProfMat*. Lisboa: APM.
- Yin, R. (1984). Case study research: Design and methods. *Newbury Park, CA: Sage*.
- Weber, K. (2010). Mathematics majors' perceptions of conviction, validity, and proof. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(4), 306–336.
- Zazkis, R., Liljedahl, P., & Chernoff, E. J. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM Mathematics Education*, 40, 131-141.